

光で“創る” トポロジカル絶縁体

小布施 秀明

トポロジー工学特別講義II

2014.12.12

- 1.トポロジカル絶縁体 : Introduction
- 2.量子ウォーク : Introduction
- 3.トポロジカル絶縁体 : 対称性とトポロジカルな位相
- 4.量子ウォークで“創る”トポロジカル絶縁体
- 5.量子ウォーク実験における隠れたトポロジカル位相

1. トポロジカル絶縁体: Introduction

金属と絶縁体 (物性物理)

物質の電気的性質(電気抵抗)は、どのように決まるのか?

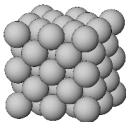
金属 : 鉄(Fe)、銅(Cu)、金(Au)、銀(Ag)

絶縁体: ダイヤモンド(C)、硫黄(S)

●バンド理論

定常状態の実空間Schroedinger方程式

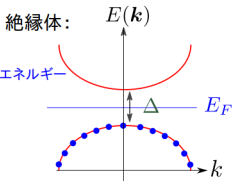
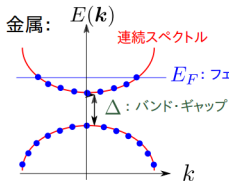
$$H(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$



結晶: 周期的な空間構造 → 空間についてフーリエ変換

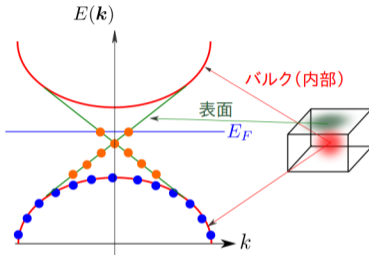
$$\tilde{H}(\mathbf{k})\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k})\tilde{\psi}(\mathbf{k})$$

分散関係: $E(\mathbf{k})$



トポロジカル絶縁体

トポロジカル絶縁体: Kane, Mele, PRL (05)



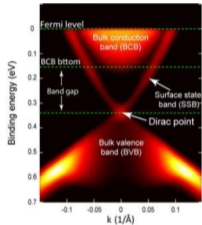
バルク: バンド・ギャップ内に E_F ➡ 絶縁体

表面: ギャップ中に連続スペクトル ➡ 金属 (完全伝導)

● 波動関数のトポロジカルな性質に起因 (Berry位相)



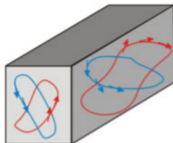
トポロジカル絶縁体/超伝導体



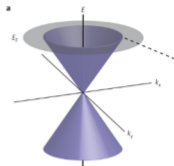
Bi_2Se_3 Hasan ('09)

d次元トポロジカル絶縁体の表面状態

● 3次元

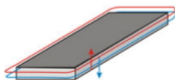


2次元表面状態

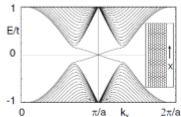


Dirac cone

● 2次元



1次元表面状態



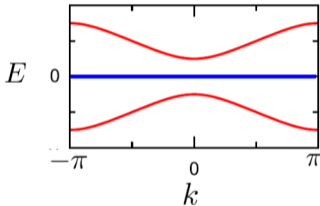
一方向のみ線形分散

● 1次元

トポロジカルな
表面局在状態
(エッジ状態)



0次元(局在)



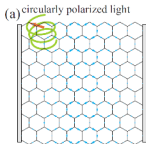
トポロジカル絶縁体の問題点

- トポロジカル絶縁体となる物質は限られている

強いスピン-軌道相互作用が必要 Bi_2Se_3

- トポロジカル絶縁体を“創る”ことは可能か？

光誘起トポロジカル絶縁体



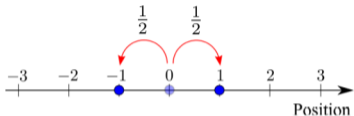
人工的なトポロジカル絶縁体：量子ウォーク

2.量子ウォーク: Introduction

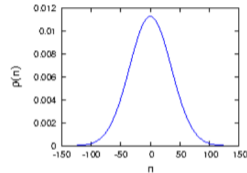
量子ウォーク

古典極限においてランダムウォークとなるような粒子の量子力学的運動

● (1次元)ランダムウォーク



t秒後の存在確率



● (離散時間 1次元 2自由度)量子ウォーク

- 内部状態が2つある粒子 例) 電子 \uparrow 右に移動 \downarrow 左に移動

- 内部状態を変更する操作 : コイン演算子 \mathcal{R}
-
- A diagram showing a coin operator \mathcal{R} . On the left, a grey circle with an upward-pointing red arrow \uparrow is shown. An arrow points to the right, where a grey circle with an upward-pointing red arrow \uparrow and a grey circle with a downward-pointing blue arrow \downarrow are shown, separated by a plus sign $+$.

- 内部状態に応じて移動する操作 : シフト演算子 \mathcal{S}
-
- A diagram showing a shift operator \mathcal{S} . A horizontal axis labeled "Position" has tick marks at -2, -1, 0, 1, 2. A grey circle with a downward-pointing blue arrow \downarrow is at position -1. A grey circle with an upward-pointing red arrow \uparrow is at position 0. A grey circle with an upward-pointing red arrow \uparrow is at position 1. A plus sign $+$ is between the circles at 0 and 1.

1次元離散時間量子ウォークの定義

- 基底:

$$|x\rangle \otimes \begin{pmatrix} |R\rangle \\ |L\rangle \end{pmatrix} \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- コイン演算子: 内部自由度を変更

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(-i\theta\sigma_2)$$

$$\mathcal{R} = \sum_x |x\rangle\langle x| \otimes C(\theta(x))$$

- シフト演算子: 粒子の位置を変更

$$S = S_- S_+$$

$$S_+ = \sum_x |x+1\rangle \otimes |R\rangle\langle x| \otimes \langle R|$$

$$S_- = \sum_x |x-1\rangle \otimes |L\rangle\langle x| \otimes \langle L|$$

Pauli行列

$$\sigma_1 (= \sigma_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 (= \sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 (= \sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

関係式:

$$\sigma_i^2 = \sigma_0$$

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \quad (i \neq j)$$

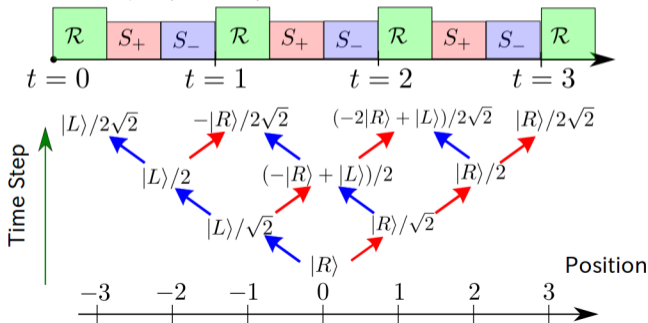
$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 \quad (\text{サイクリック})$$

量子ウォークの時間発展

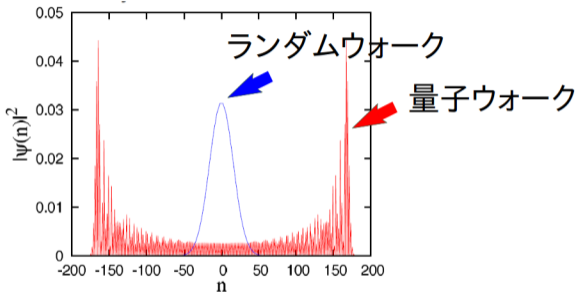
- (単一ステップ量子ウォークの)時間発展演算子:

$$U = S\mathcal{R} = S_- S_+ \mathcal{R}$$

$$C(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



量子ウォークの良い所



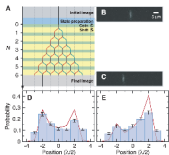
量子ウォークはランダムウォークよりも早く広がることができる



- 量子情報への応用

量子ウォークの様々な実験

● 光学トラップされた冷却原子

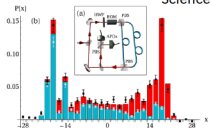


Karski *et al.*
Science **325**, 174 ('09)

セシウム原子
内部自由度：合成角運動量
位置：実空間

● 光ファイバーループ

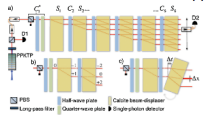
Schreiber *et al.*
PRL **106**, 180403 ('11);
Science **336**, 55 ('12)



Photon
内部自由度：縦・横偏向
位置：時間

● ビーム・スプリッター列

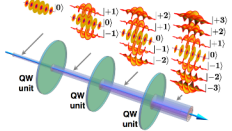
Broome *et al.*
PRL **104**, 153602 ('10)



Photon
内部自由度：縦・横偏向
位置：実空間

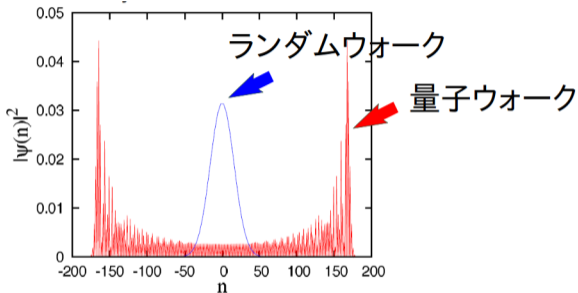
● 光渦

Cardano *et al.* arXiv:1403.4857, 1407.5424



Photon
内部自由度：スピン角運動量 (右・左円偏向)
位置：軌道角運動量 (渦)

量子ウォークの良い所



量子ウォークはランダムウォークよりも早く広がることができる



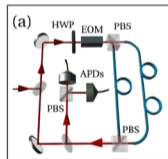
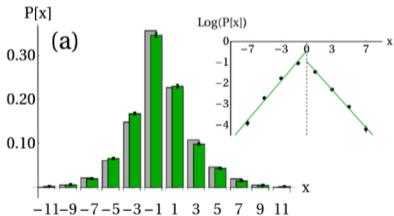
- 量子情報への応用
- 近年、実験が急速に発達

Decoherence and Disorder in Quantum Walks: From Ballistic Spread to Localization

A. Schreiber,^{1,*} K. N. Cassemiro,¹ V. Potoček,² A. Gábris,^{2,†} I. Jex,² and Ch. Silberhorn^{1,3}

空間的にランダムに変化するコイン演算子を用いる

➡ アンダーソン局在

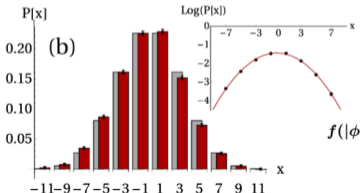


$$C_{\text{EOM}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp[i\phi(x)] \end{pmatrix}$$

量子ー古典クロスオーバー

時間的にランダムに変化するコイン演算子を用いる

➡ 古典系(ランダムウォーク)へのクロスオーバー



負の質量(作用-反作用の法則の破れ)

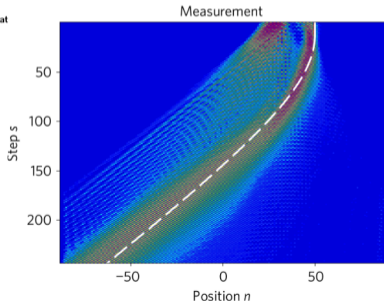
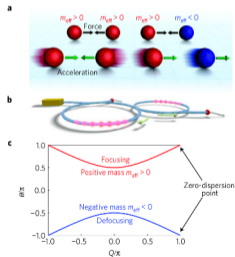
LETTERS

PUBLISHED ONLINE: 13 OCTOBER 2013 | DOI: 10.1038/NPHYS2777

nature
physics

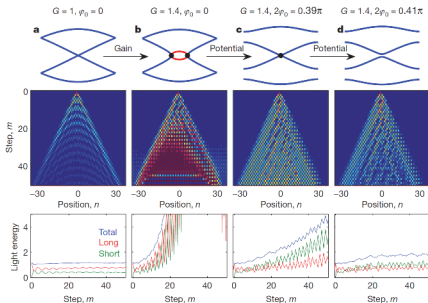
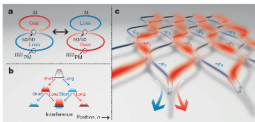
Optical diametric drive acceleration through action-reaction symmetry breaking

Martin Wimmer^{1,2}, Alois Regensburger¹, Christoph Bersch¹, Mohammad-Ali Miri³, Sascha Bat Georgy Onishchukov^{1,4}, Demetrios N. Christodoulides³ and Ulf Peschel^{1*}



Parity-time synthetic photonic lattices

Alois Regensburger^{1,2}, Christoph Bersch^{1,2}, Mohammad-Ali Miri³, Georgy Onishchukov², Demetrios N. Christodoulides³ & Ulf Peschel¹

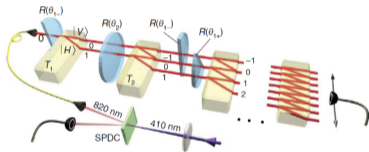


$$u_n^{m+1} = \frac{G^{\pm 1/2}}{\sqrt{2}} (u_{n+1}^m + i v_{n+1}^m)$$

$$v_n^{m+1} = \frac{G^{\mp 1/2}}{\sqrt{2}} (i u_{n-1}^m + v_{n-1}^m) e^{i\varphi(n)}$$

Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks

Takuya Kitagawa^{1,*}, Matthew A. Broome^{2,*}, Alessandro Fedrizzi², Mark S. Rudner¹, Erez Berg¹, Ivan Kassal^{2,3}, Alán Aspuru-Guzik³, Eugene Demler¹ & Andrew G. White²

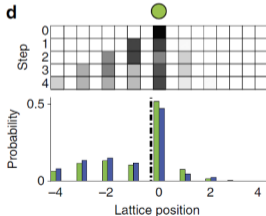


HWP (half wave plate)

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Beam displacer

$$S = S_+ S_-$$

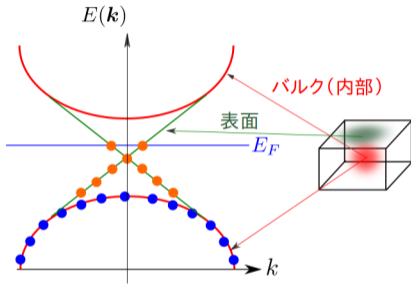


3.トポロジカル絶縁体： 対称性とトポロジカルな位相

バンド絶縁体とトポロジカル絶縁体

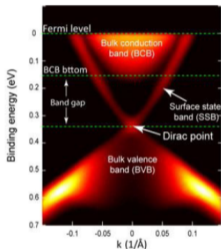
トポロジカル絶縁体：

Kane, Mele, PRL (05)



バルク： バンド・ギャップ内に E_F ➡ 絶縁体

表面： ギャップ中に連続スペクトル ➡ 金属
(完全伝導)

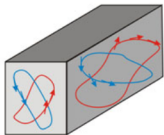


Bi_2Se_3 Hasan ('09)

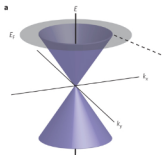
● 波動関数のトポロジカルな性質に起因 (Berry位相)

d次元トポロジカル絶縁体の表面状態

● 3次元

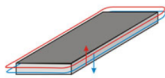


2次元表面状態

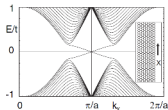


Dirac cone

● 2次元



1次元表面状態

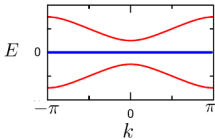


一方向のみ線形分散

● 1次元



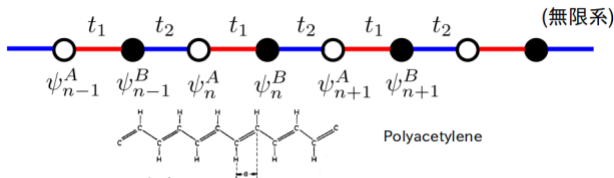
0次元(局在)



フラット・バンド

1次元トポジカル絶縁体のモデル

- SSHモデル (Su, Schrieffer, Heeger, PRL '79)



- ハミルトニアン(実空間)

$$E\psi_n^A = t_1\psi_n^B + t_2\psi_{n-1}^B$$

$$E\psi_n^B = t_1\psi_n^A + t_2\psi_{n+1}^A$$

- ハミルトニアン(波数空間)

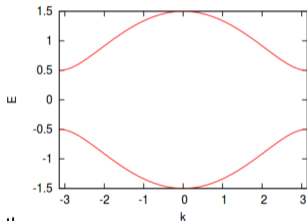
$$\psi_n^x = e^{ikn} u_k^x \quad (x = A, B) \quad : \text{ブロッホ波動関数}$$

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

SSHモデルの固有値問題

● 固有値

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos k}$$



↑ エネルギーギャップ:
↓ $2|t_1 - t_2|$

● 固有ベクトル

$$\psi_{k-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi(k)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

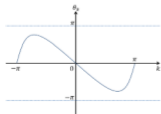
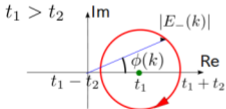
$$|E_-| e^{i\phi(k)} = t_1 + t_2 e^{-ik}$$

トポロジカル数：Zak位相

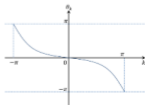
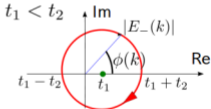
●トポロジカル数(Zak位相)

$$\begin{aligned}\nu &\equiv \frac{1}{\pi i} \oint dk \langle \psi_k | \nabla_k | \psi_k \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\phi(k)}{dk} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint d\phi(k)\end{aligned}$$

● $|E_-(k)|e^{i\phi(k)} = t_1 + t_2e^{-ik}$



$$\nu = 0$$



$$\nu = -1$$

Zak位相

結晶中の波数の

周期性に伴うBerry位相

Berry位相

$$H(t) = H_0 + R(t)$$

$$R(t+T) = R(t)$$

$$\oint dR \langle \psi | \nabla_R | \psi \rangle$$

トポロジカル数 : winding数

- トポロジカル数(winding数、巻き数)

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h(k) \\ h(k)^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

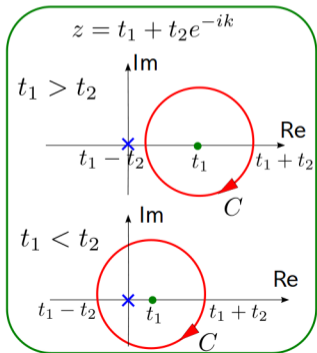
$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dk \frac{d}{dk} \ln \det h(k)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dk \frac{-it_2 e^{-ik}}{t_1 + t_2 e^{-ik}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{1}{z}$$

$$= \begin{cases} 0 & (t_1 > t_2) \\ -1 & (t_1 < t_2) \end{cases}$$

積分経路が多少変わっても、
トポロジカル数は変わらない



バルク - エッジ対応

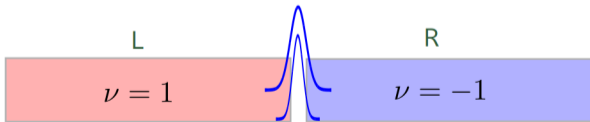
表面における
トポロジカル数の差
(の絶対値)

\leq

表面局在状態
(エッジ状態)の数



エッジ状態が1つ



エッジ状態が2つ

対称性によるトポロジカル絶縁体の分類

- 時間反転対称性

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H$$

$$\mathcal{T}^2 = \pm 1$$

anti-unitary

(complex conjugate)

- 粒子-ホール対称性

$$\mathcal{P}H\mathcal{P}^{-1} = -H$$

$$\mathcal{P}^2 = \pm 1$$

anti-unitary

- カイラル対称性

$$\Gamma H\Gamma^{-1} = -H$$

$$\Gamma = \mathcal{T}\mathcal{P}$$

unitary

universality class		TRS	PHS	chiral symmetry	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
Standard (Wigner-Dyson)	A	0	0	0	-	\mathbb{Z}	-
	AI	+1	0	0	-	-	-
	AII	-1	0	0	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
Chiral	AIII	0	0	1	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}
	BDI	+1	+1	1	\mathbb{Z}	-	-
	CII	-1	-1	1	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2
BdG	D	0	+1	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-
	C	0	-1	0	-	\mathbb{Z}	-
	DIII	-1	+1	1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
	CI	+1	-1	1	-	-	\mathbb{Z}

Schnyder, Ryu, Furusaki, Ludwig, PRB '08; Kitaev, AIP Conf. '09

(ギャップを閉じる or 対称性を破らない限り)

エッジ状態は、系の摂動に対して強い

SSHモデルの対称性

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

- 時間反転対称性

$$\mathcal{K}H(k)\mathcal{K}^{-1} = H(-k)$$

- カイラル対称性

$$\sigma_3 H(k) \sigma_3^{-1} = -H(k)$$

- 粒子-ホール対称性

$$\sigma_3 \mathcal{K} H(k) (\sigma_3 \mathcal{K})^{-1} = -H(-k)$$

chiral orthogonal (class BDI)に属する

4.量子ウォークで“創る” トポロジカル絶縁体

Kitagawa, Rudner, Berg, Demler, PRA ('10)

Kitagawa, Broome, Fedrizzi, *et al.*, Nature Comm. ('12)

Asboth and HO, PRB 88 12306 (R) ('13)

量子ウォークにおける対称性

Kitagawa et al. PRA '10

- 時間発展演算子とハミルトニアン

$$U = \exp(-iH\delta t)$$

- 時間反転対称性

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H \quad \longrightarrow \quad \mathcal{T}U\mathcal{T}^{-1} = U^\dagger = U^{-1}$$

- 粒子-ホール対称性

$$\mathcal{P}H\mathcal{P}^{-1} = -H \quad \longrightarrow \quad \mathcal{P}U\mathcal{P}^{-1} = U$$

- カイラル対称性

U の成分が実数

$$\Gamma H \Gamma^{-1} = -H \quad \longrightarrow \quad \Gamma U \Gamma^{-1} = U^\dagger = U^{-1}$$

対称性の制御が可能

粒子-ホール対称性が容易に保たれる

トポロジカル相を調べる上で理想的な実験場

量子ウォークの有効ハミルトニアン

Kitagawa *et al.* PRA '10

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$
$$S = \sum_k |k\rangle\langle k| \otimes \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix}$$

(波数空間におけるシフト演算子)

$$\Rightarrow U = \exp(-iH\delta t)$$

量子ウォークの有効ハミルトニアン

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} dk [\omega(k)\mathbf{d}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes |k\rangle\langle k|],$$
$$\mathbf{d}(k) = [\sin(\theta) \sin k, \sin(\theta) \cos k, -\cos(\theta) \sin k] / \sin \omega(k),$$
$$\omega(k) = \pm \arccos [\cos(k) \cos(\theta)] + 2n\pi.$$

カイラル対称性: $\Gamma H \Gamma^{-1} = -H$

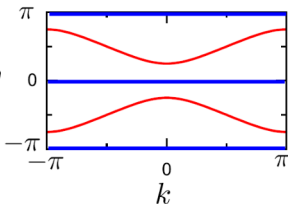
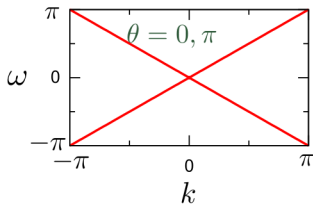
$$\Gamma = \exp \{ -i\pi [\cos \theta(x)\sigma_1 + \sin \theta(x)\sigma_3] \}$$

量子ウォークの有効ハミルトニアン

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} dk [\omega(k) \mathbf{d}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes |k\rangle\langle k|],$$

$$\mathbf{d}(k) = [\sin(\theta) \sin k, \sin(\theta) \cos k, -\cos(\theta) \sin k] / \sin \omega(k),$$

$$\omega(k) = \pm \arccos [\cos(k) \cos(\theta)] + 2n\pi.$$



$$U\psi = e^{i\omega} \psi$$

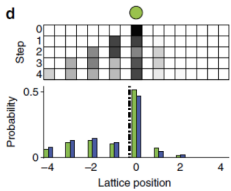
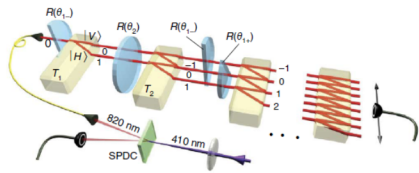
ω : 2π 周期性

$$\nu = \begin{cases} 1 & (\theta > 0) \\ 0 & (\theta < 0) \end{cases}$$

量子ウォークのエッジ状態の観測

● 光学系

Kitagawa *et al.* Nature Comm. '12



内部自由度：縦・横偏光

HWP (half wave plate)

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Beam displacer

$$S = S_+ S_-$$

カイラル・ph対称性

ℤ トポロジカル相

エッジ状態(class BDI)の観測

カイラル対称性を有する 量子ウォークのトポロジカル相

Asboth and HO, PRB 88 12306 (R) ('13)

以前の研究の問題点

1. カイラル対称性の定義が不十分

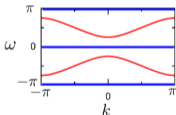
$$\Gamma H \Gamma^{-1} = -H, \quad \Gamma U \Gamma^{-1} = U^\dagger$$

$$\Gamma = \exp \{ -i\pi [\cos \theta \sigma_1 + \sin \theta \sigma_3] \}$$

θ は場所に依存してはいけない!

実際は、 θ が場所に依存しても、カイラル対称性が保たれる

2. $\omega = 0, \pi$ のどちらのトポロジカル数?



3. 理論と実験のコイン演算子が違う

理論:

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

実験:

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

時間発展演算子の再定義

- カイラル対称性: $\Gamma U \Gamma^{-1} = U^{-1}$

$$U = S \mathcal{R} = S_- S_+ \mathcal{R}$$

$$U^{-1} = \mathcal{R}^{-1} S_+^{-1} S_-^{-1}$$

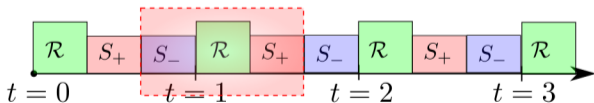
コインとシフト演算子の順番が
入れ替わってしまう

$$\mathcal{R} = \sum_x |x\rangle\langle x| \otimes C(\theta(x))$$

$$S_+ = \sum_x |x+1, R\rangle\langle x, R|$$

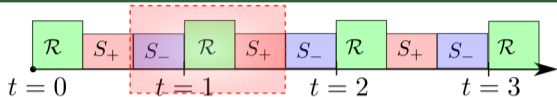
$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$
$$= \exp(-i\theta\sigma_2)$$

$$S_- = \sum_x |x-1, L\rangle\langle x, L|$$



U'

$$U' = S_+ \mathcal{R} S_-$$



$$U' = S_+ \mathcal{R} S_-$$

仮定: $\Gamma = \sigma_1$

$$\begin{aligned} \sigma_1 (S_+ \mathcal{R} S_-) \sigma_1 &= [\sigma_1 S_+ \sigma_1] [\sigma_1 \mathcal{R} \sigma_1] [\sigma_1 S_- \sigma_1] \\ &= S_-^{-1} \mathcal{R}^{-1} S_+^{-1} = U'^{-1} \end{aligned}$$

1. コイン演算子が満たすべき条件

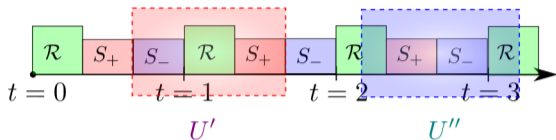
$$\sigma_1 C(\theta) \sigma_1 = C(\theta)^{-1}$$

2. シフト演算子が満たすべき条件

$$\sigma_1 S_{\pm} \sigma_1 = S_{\mp}^{-1}$$

- $\sigma_1 C(\theta) \sigma_1 = \sigma_1 \exp(-i\theta \sigma_2) \sigma_1 = \exp(i\theta \sigma_2) = C(-\theta) = C(\theta)^{-1}$
- $\sigma_1 S_+ \sigma_1 = \sigma_1 \sum_x |x+1, R\rangle \langle x, R| \sigma_1 = \sum_x |x+1, L\rangle \langle x, L| = S_-^{-1}$

2つの時間発展演算子



$$U' = S_+ \mathcal{R}(\theta) S_-$$

$$\sigma_1 (S_+ \mathcal{R}(\theta) S_-) \sigma_1$$

$$= [\sigma_1 S_+ \sigma_1] [\sigma_1 \mathcal{R}(\theta) \sigma_1] [\sigma_1 S_- \sigma_1]$$

$$= S_-^{-1} \mathcal{R}(\theta)^{-1} S_+^{-1} = U'^{-1}$$

$$U'' = \mathcal{R}(\theta/2) S_- S_+ \mathcal{R}(\theta/2)$$

$$\sigma_1 (\mathcal{R}(\theta/2) S_- S_+ \mathcal{R}(\theta/2)) \sigma_1$$

$$= \mathcal{R}(\theta/2)^{-1} S_+^{-1} S_-^{-1} \mathcal{R}(\theta/2)^{-1}$$

$$= U''^{-1}$$

カイラル対称性を有する量子ウォークは
2種類の時間発展演算子を持つ

2つのwinding数

- 波数空間表示

$$U' = \sum_k |k\rangle\langle k| \otimes U'(k)$$

- 有効ハミルトニアン

$$H'_{eff} = \sin(H') = [U'^{\dagger}(k) - U'(k)] / 2i$$

- winding数

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & h'(k) \\ h'^{\dagger}(k) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu' = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{d}{dk} \ln \det h'(k)$$

- U'' についても同様に計算

$$\nu' = 0, \quad \nu'' = \begin{cases} 1 & (\theta > 0) \\ -1 & (\theta < 0) \end{cases}$$

異なるwinding数 ν', ν''

$\omega = 0, \pi$ のwinding数の足しあわせ

バルク - エッジ対応

- 異なる量子ウォークを接合



- カイラル対称性のある系のエッジ状態は A or B 副格子上に存在

$$\# \text{ A格子上のエッジ状態数: } m'_A = m'_{A,0} + m'_{A,\pi}$$

$$\# \text{ B格子上のエッジ状態数: } m'_B = m'_{B,0} + m'_{B,\pi}$$

- $0, \pi$ エッジ状態のトポロジカル数: $\nu_{L,\omega} - \nu_{R,\omega} = m'_{A,\omega} - m'_{B,\omega}$

- winding数は $0, \pi$ エッジ状態数の和: $\nu'_L - \nu'_R = m'_A - m'_B$

$$\nu''_L - \nu''_R = m''_A - m''_B$$

- U' と U'' のエッジ状態数の関係:

$$m''_A = m'_{A,0} + m'_{B,\pi}$$

$$m''_B = m'_{B,0} + m'_{A,\pi}$$

$$\Gamma \Psi = (-1)^g \Psi \quad \Psi : U' \text{ のエッジ状態}$$

$$\Gamma \Phi = (-1)^f \Phi \quad \Phi = G\Psi : U'' \text{ のエッジ状態}$$

$$U'' \Phi = (-1)^{g+f} \Phi$$

$$m'_{A,0} - m'_{B,0} = (\nu'_L + \nu''_L)/2 - (\nu'_R + \nu''_R)/2$$

$$m'_{A,\pi} - m'_{B,\pi} = (\nu'_L - \nu''_L)/2 - (\nu'_R - \nu''_R)/2$$

トポロジカル数の計算

$$(\nu_0, \nu_\pi) = \left(\frac{\nu' + \nu''}{2}, \frac{\nu' - \nu''}{2} \right)$$

$$\nu' = 0, \quad \nu'' = \begin{cases} 1 & (\theta > 0) \\ -1 & (\theta < 0) \end{cases} \quad \text{の場合}$$

$$(\nu_0, \nu_\pi) = \begin{cases} (+1/2, -1/2) & (\theta > 0) \\ (-1/2, +1/2) & (\theta < 0) \end{cases}$$

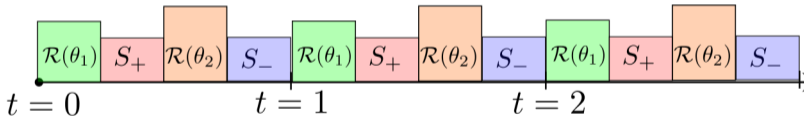
$\theta > 0$

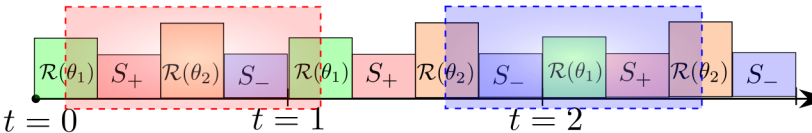
$\theta < 0$

$\omega = 0, \pi$ にエッジ状態が1つずつ現れる

複雑な量子ウォークの場合

$$U = S_- \mathcal{R}(\theta_2) S_+ \mathcal{R}(\theta_1)$$



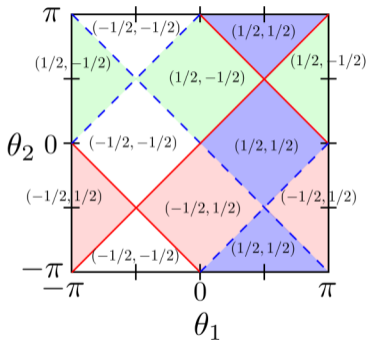


$$U' = \mathcal{R}(\theta_1/2) S_- \mathcal{R}(\theta_2) S_+ \mathcal{R}(\theta_1/2)$$

$$U'' = \mathcal{R}(\theta_2/2) S_- \mathcal{R}(\theta_1) S_+ \mathcal{R}(\theta_2/2)$$

カイラル対称性あり!

トポロジカル数の相図



Summary

- 量子ウォークを用いてトポロジカル絶縁体を創る処方箋を与えた。
- 以前の実験で未解決であったトポロジカル数の問題を解決した。

レポート課題

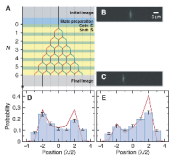
SSHモデルのトポロジカル数の導出をせよ。
導出途中の式を、詳しく書くこと。

または

講義で紹介した量子ウォークの実験論文の
どれか一つについて、レポートにまとめよ。
実験装置等の詳細も書くこと。
(次ページ以降に実験論文を再掲載してある。)

量子ウォークの様々な実験

● 光学トラップされた冷却原子

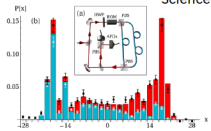


Karski *et al.*
Science **325**, 174 ('09)

セシウム原子
内部自由度: 合成角運動量
位置 : 実空間

● 光ファイバーループ

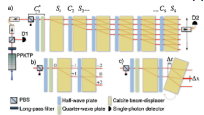
Schreiber *et al.*
PRL **106**, 180403 ('11);
Science **336**, 55 ('12)



Photon
内部自由度: 縦・横偏向
位置 : 時間

● ビーム・スプリッター列

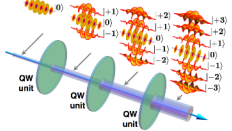
Broome *et al.*
PRL **104**, 153602 ('10)



Photon
内部自由度: 縦・横偏向
位置 : 実空間

● 光渦

Cardano *et al.* arXiv:1403.4857, 1407.5424



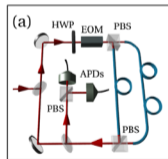
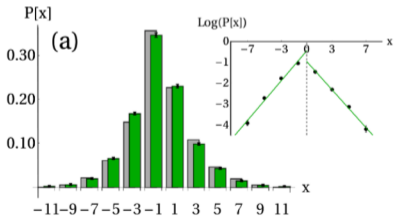
Photon
内部自由度: スピン角運動量 (右・左円偏向)
位置 : 軌道角運動量 (渦)

Decoherence and Disorder in Quantum Walks: From Ballistic Spread to Localization

A. Schreiber,^{1,*} K. N. Cassemiro,¹ V. Potoček,² A. Gábris,^{2,†} I. Jex,² and Ch. Silberhorn^{1,3}

空間的にランダムに変化するコイン演算子を用いる

➡ アンダーソン局在

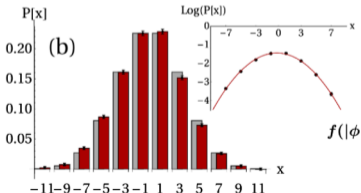


$$C_{\text{EOM}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp[i\phi(x)] \end{pmatrix}$$

量子ー古典クロスオーバー

時間的にランダムに変化するコイン演算子を用いる

➡ 古典系(ランダムウォーク)へのクロスオーバー



負の質量(作用-反作用の法則の破れ)

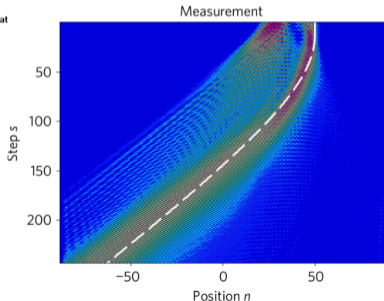
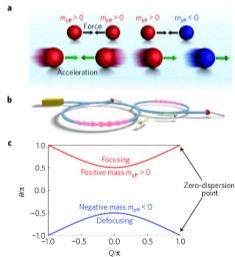
LETTERS

PUBLISHED ONLINE: 13 OCTOBER 2013 | DOI: 10.1038/NPHYS2777

nature
physics

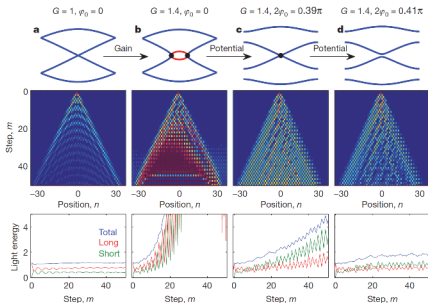
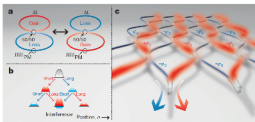
Optical diametric drive acceleration through action-reaction symmetry breaking

Martin Wimmer^{1,2}, Alois Regensburger¹, Christoph Bersch¹, Mohammad-Ali Miri³, Sascha Bat Georgy Onishchukov^{1,4}, Demetrios N. Christodoulides³ and Ulf Peschel^{1*}



Parity-time synthetic photonic lattices

Alois Regensburger^{1,2}, Christoph Bersch^{1,2}, Mohammad-Ali Miri³, Georgy Onishchukov², Demetrios N. Christodoulides³ & Ulf Peschel¹

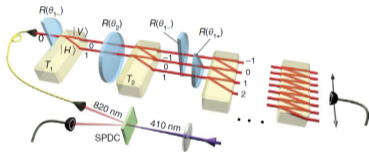


$$u_n^{m+1} = \frac{G^{\pm 1/2}}{\sqrt{2}} (u_{n+1}^m + i v_{n+1}^m)$$

$$v_n^{m+1} = \frac{G^{\mp 1/2}}{\sqrt{2}} (i u_{n-1}^m + v_{n-1}^m) e^{i\varphi(n)}$$

Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks

Takuya Kitagawa^{1,*}, Matthew A. Broome^{2,*}, Alessandro Fedrizzi², Mark S. Rudner¹, Erez Berg¹, Ivan Kassal^{2,3}, Alán Aspuru-Guzik³, Eugene Demler¹ & Andrew G. White²



HWP (half wave plate)

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Beam displacer

$$S = S_+ S_-$$

