

量子ウォークにおける トポロジカル相

小布施 秀明
(数理物理工学研究室)

トポロジー工学特別講義II
2013.11.8

- 1.量子ウォーク
- 2.トポロジカル絶縁体
- 3.量子ウォークにおけるトポロジカル相
- 4.カイラル対称性を有する量子ウォークのトポロジカル相

1.量子ウォーク

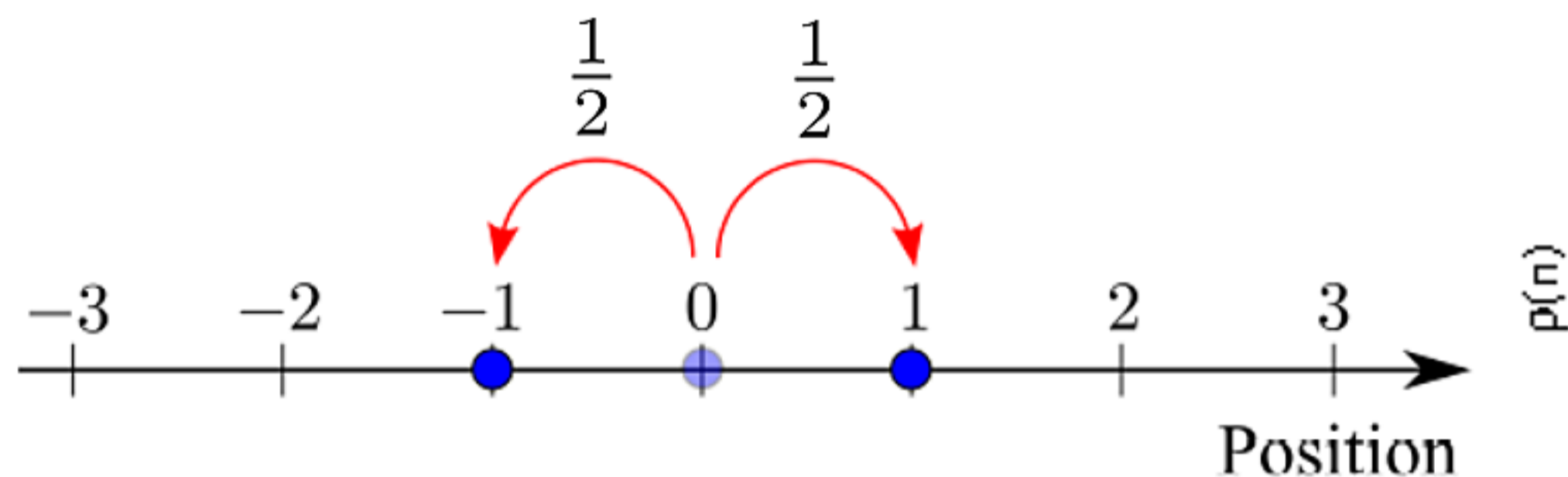
量子ウォーク

量子ウォークとは何か:

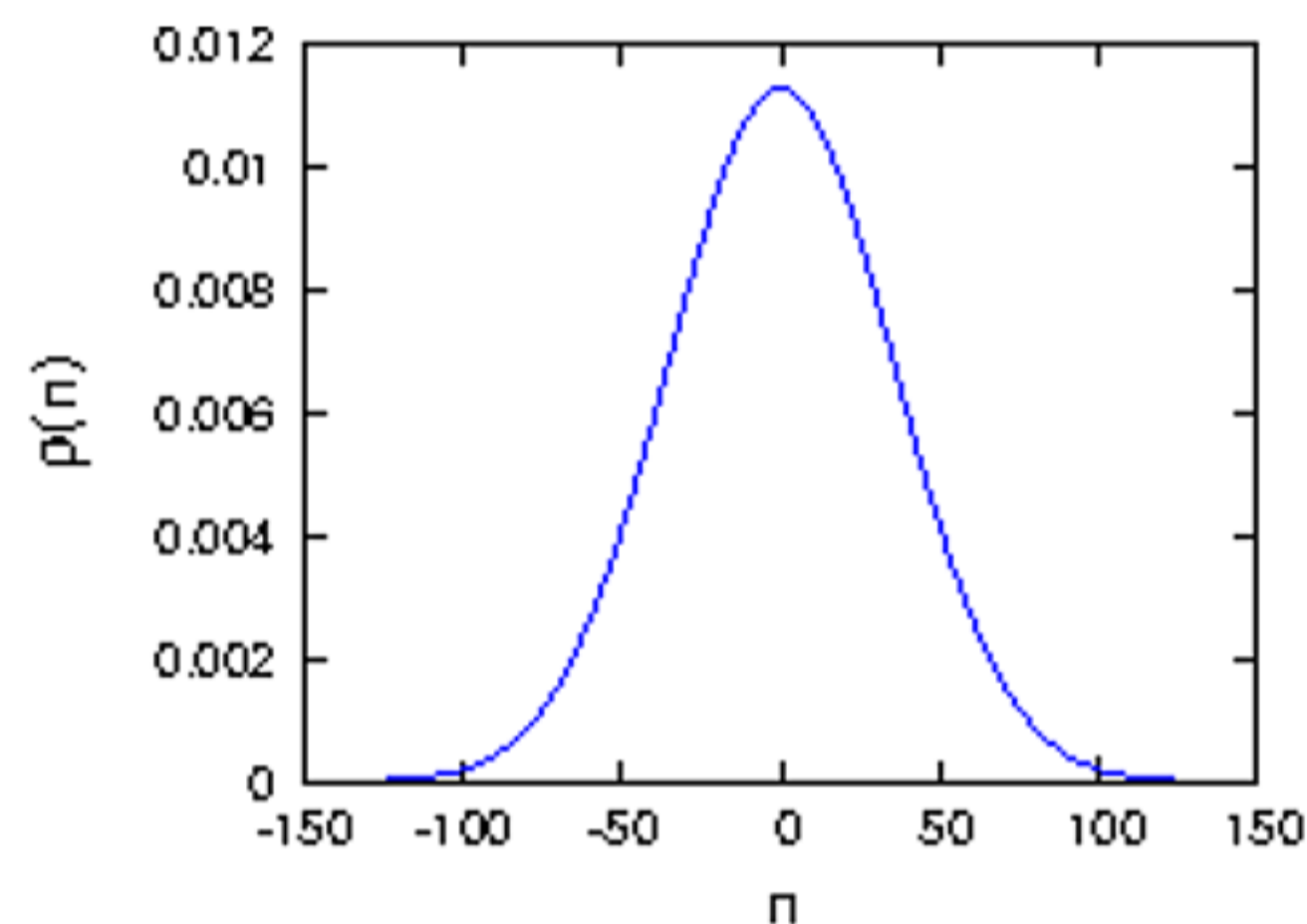
古典極限においてランダムウォークとなるような粒子の量子力学的運動

Aharonov et al PRA '93, Feynman?

● (1次元)ランダムウォーク



t秒後の存在確率



● 量子ウォーク

空間次元

1次元

時間の定義

離散時間

内部自由度の数

2つ (Left, Right)

量子ウォークの定義

- 基底: スピノル表現

$$|x\rangle \otimes \begin{pmatrix} |R\rangle \\ |L\rangle \end{pmatrix} \quad x \in \mathcal{Z}$$

- コイン演算子: 内部自由度を変更

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(-i\theta\sigma_2)$$

$$\mathcal{R} = \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes C(\theta(x))$$

- シフト演算子: 粒子の位置を変更

$$S = S_- S_+$$

$$S_+ = \sum_x |x+1\rangle \otimes |R\rangle \langle x| \otimes \langle R|$$

$$S_- = \sum_x |x-1\rangle \otimes |L\rangle \langle x| \otimes \langle L|$$

パウリ行列

$$\sigma_1 (= \sigma_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 (= \sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 (= \sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

関係式:

$$\sigma_i^2 = \sigma_0$$

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \quad (i \neq j)$$

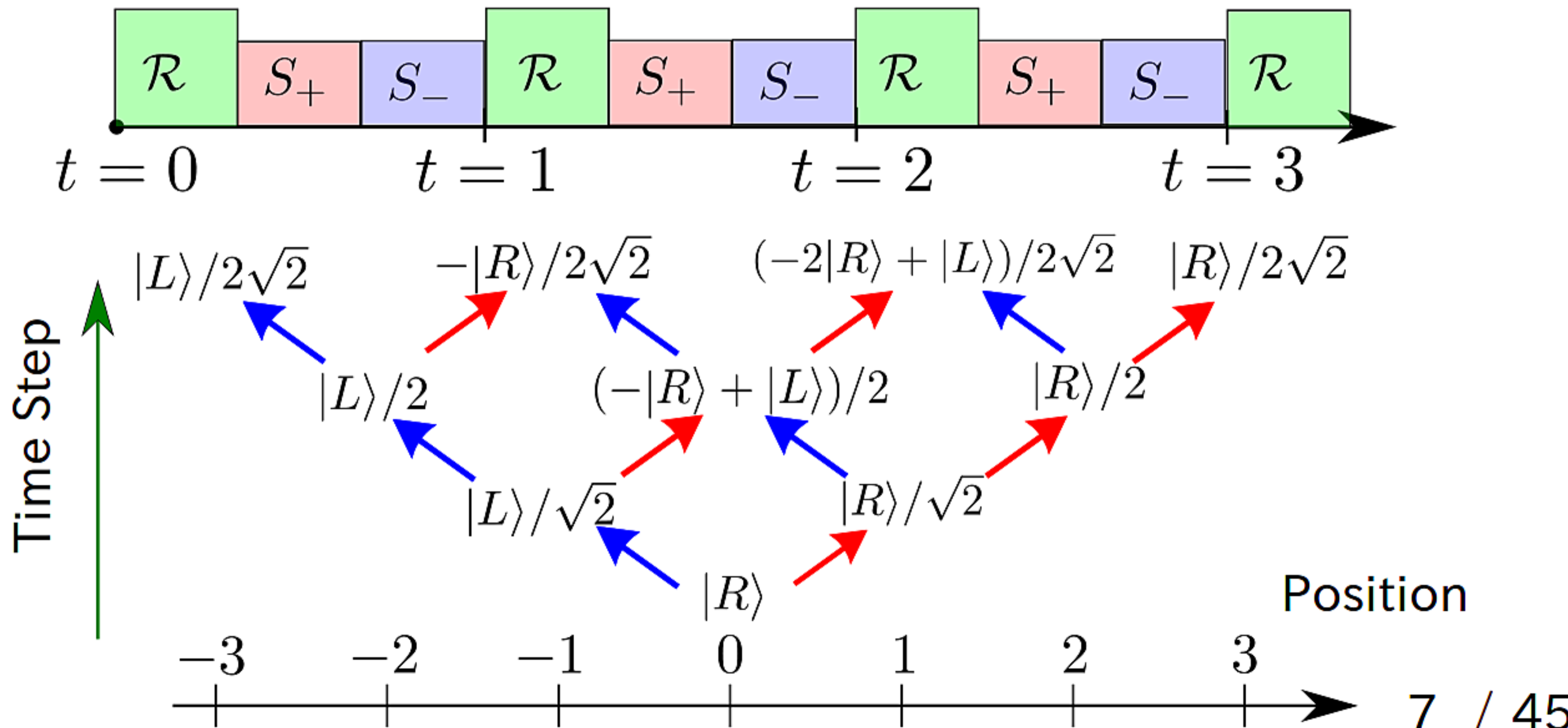
$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 \quad (\text{サイクリック})$$

量子ウォークの時間発展

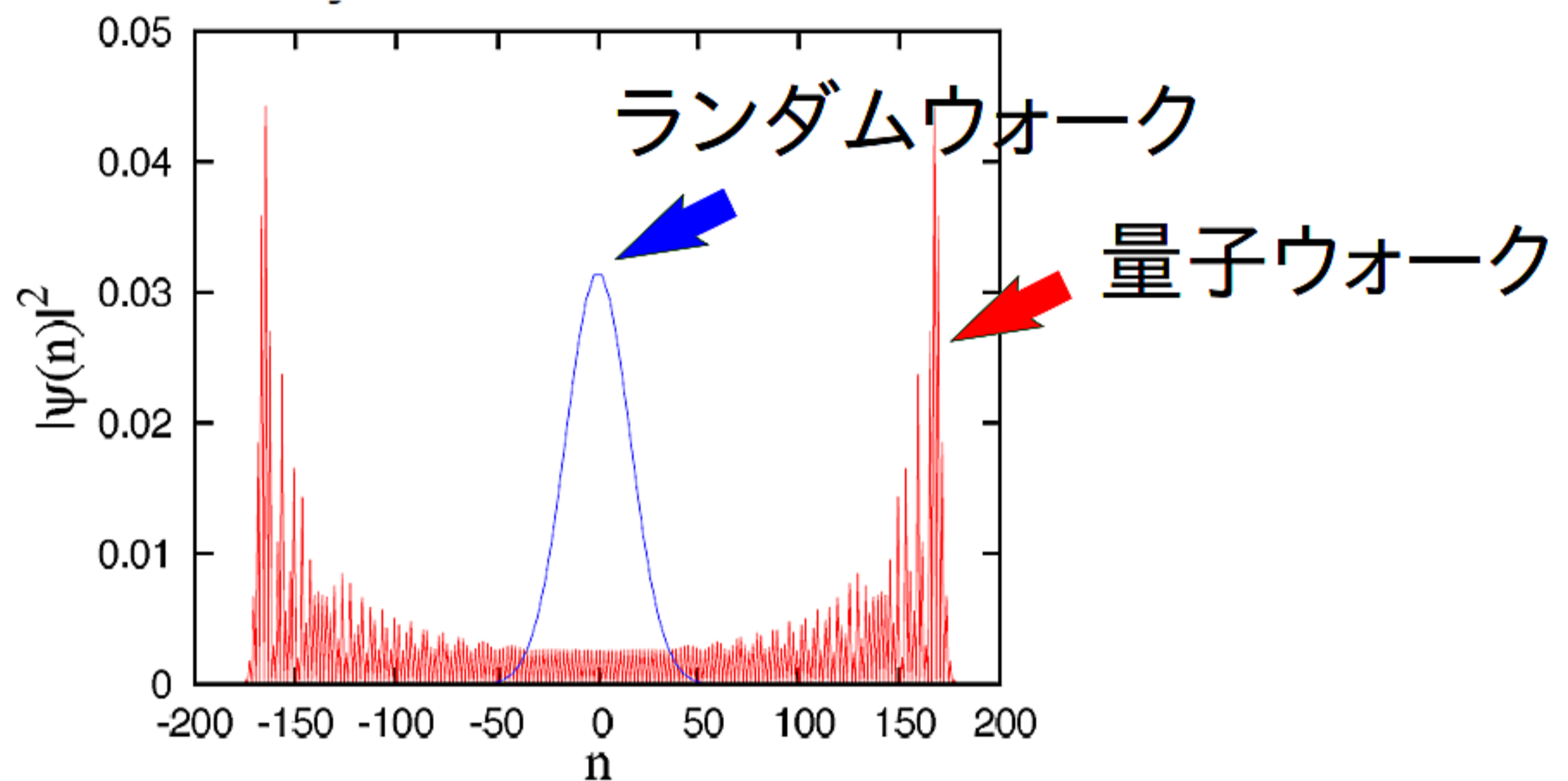
- (単一ステップ量子ウォークの)時間発展演算子:

$$U = S\mathcal{R} = S_-S_+\mathcal{R}$$

$$C(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



t秒後の存在確率分布



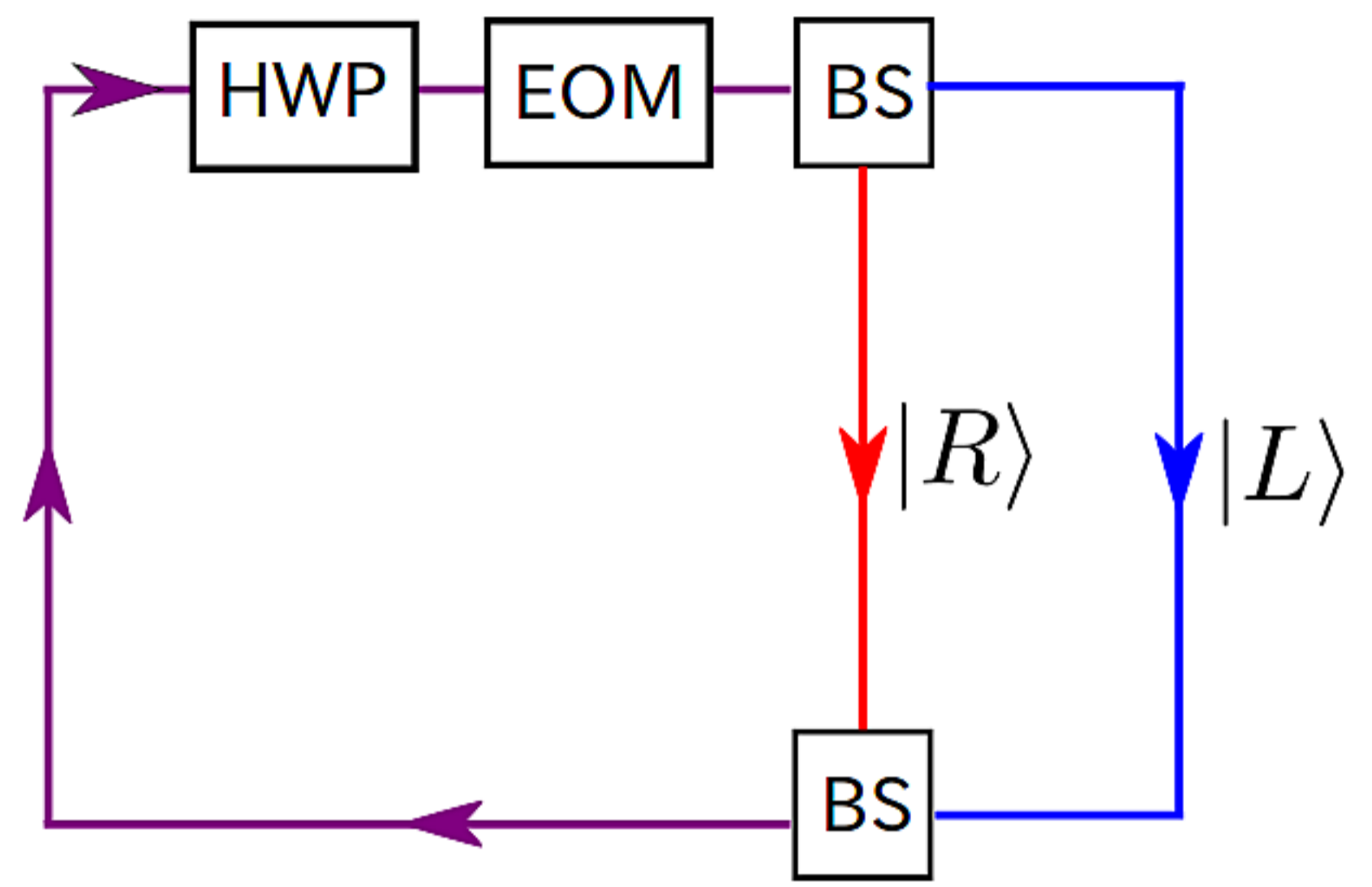
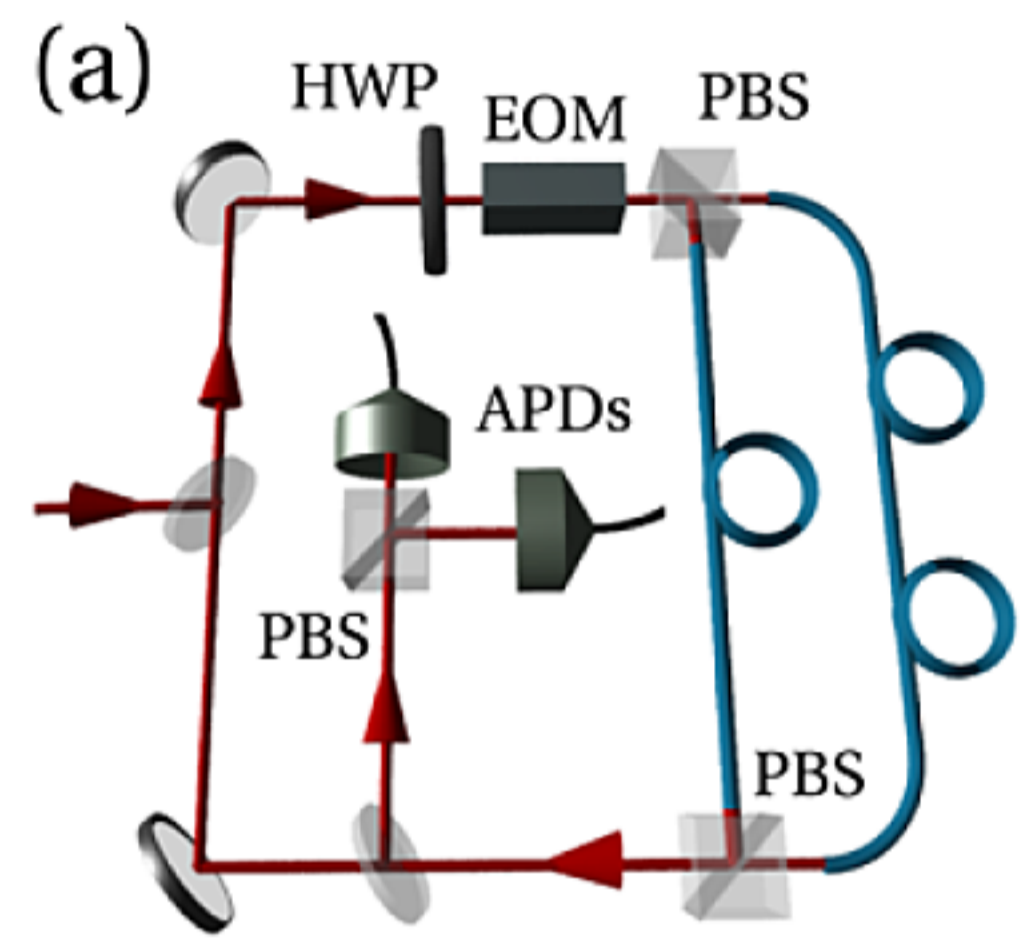
量子ウォークはランダムウォークよりも早く広がることができる



- 量子情報への応用

量子ウォークの実験

- 光ファイバーループ Silberhorn group PRL 10; Peschel group PRL 11



内部自由度：縦・横偏向

HWP (half wave plate)

$$C_{\text{ex}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

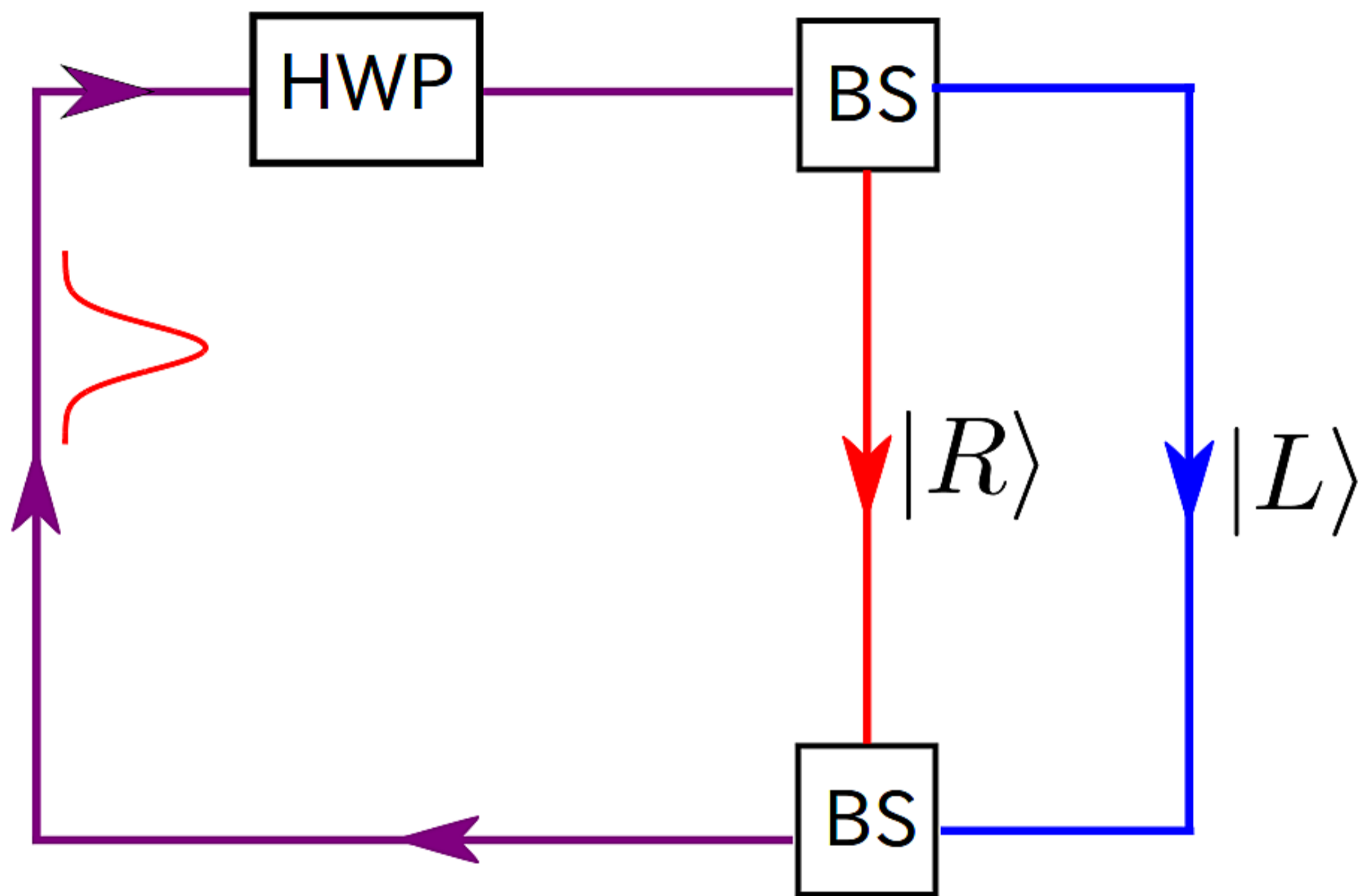
EOM (electro-optic modulator)

$$C_{\text{EOM}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp[i\phi(n)] \end{pmatrix}$$

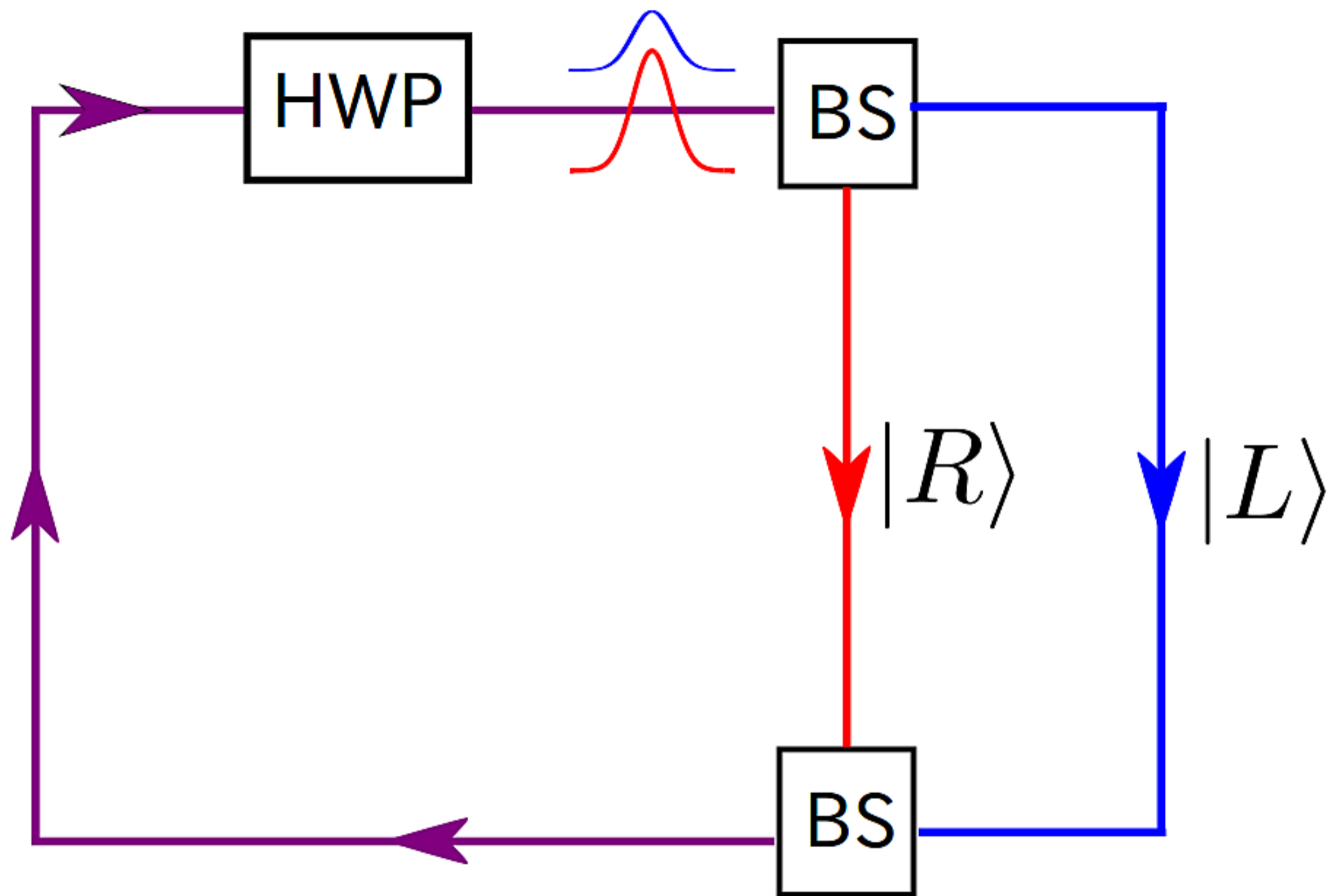
BS (beam spliter) :

$$S = S_+ S_-$$

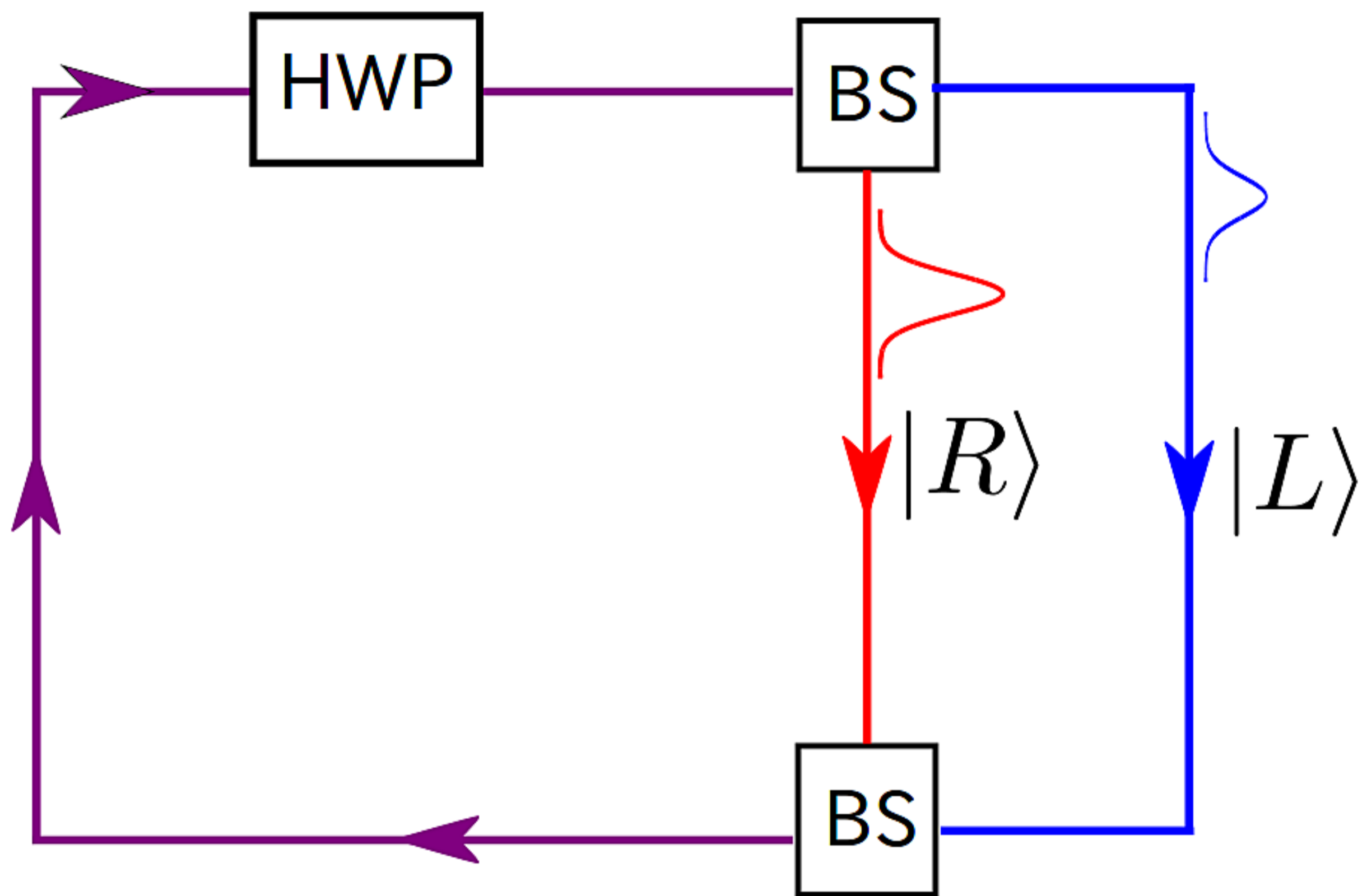
光ファイバーループ⁰



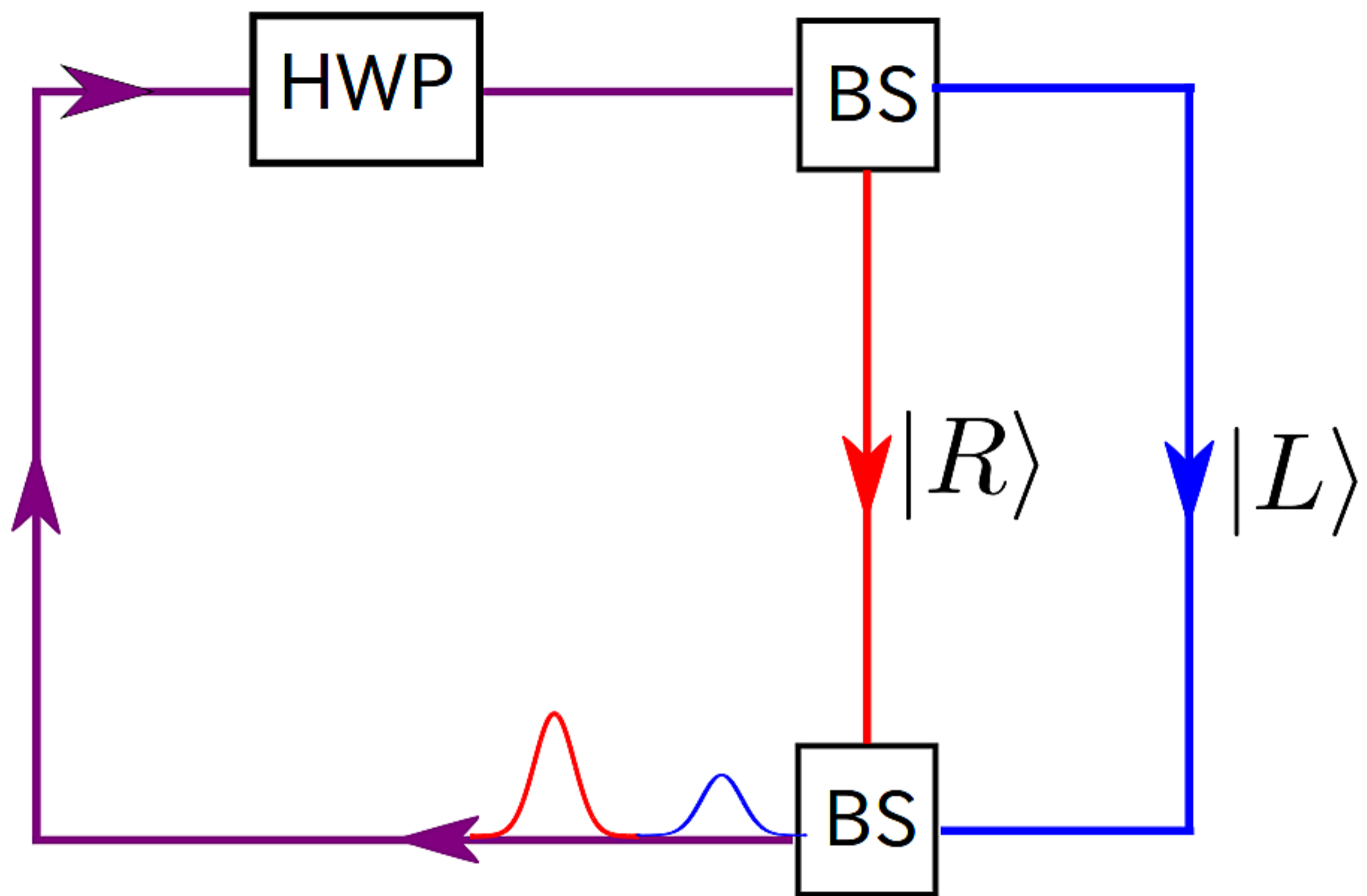
光ファイバーループ1-1



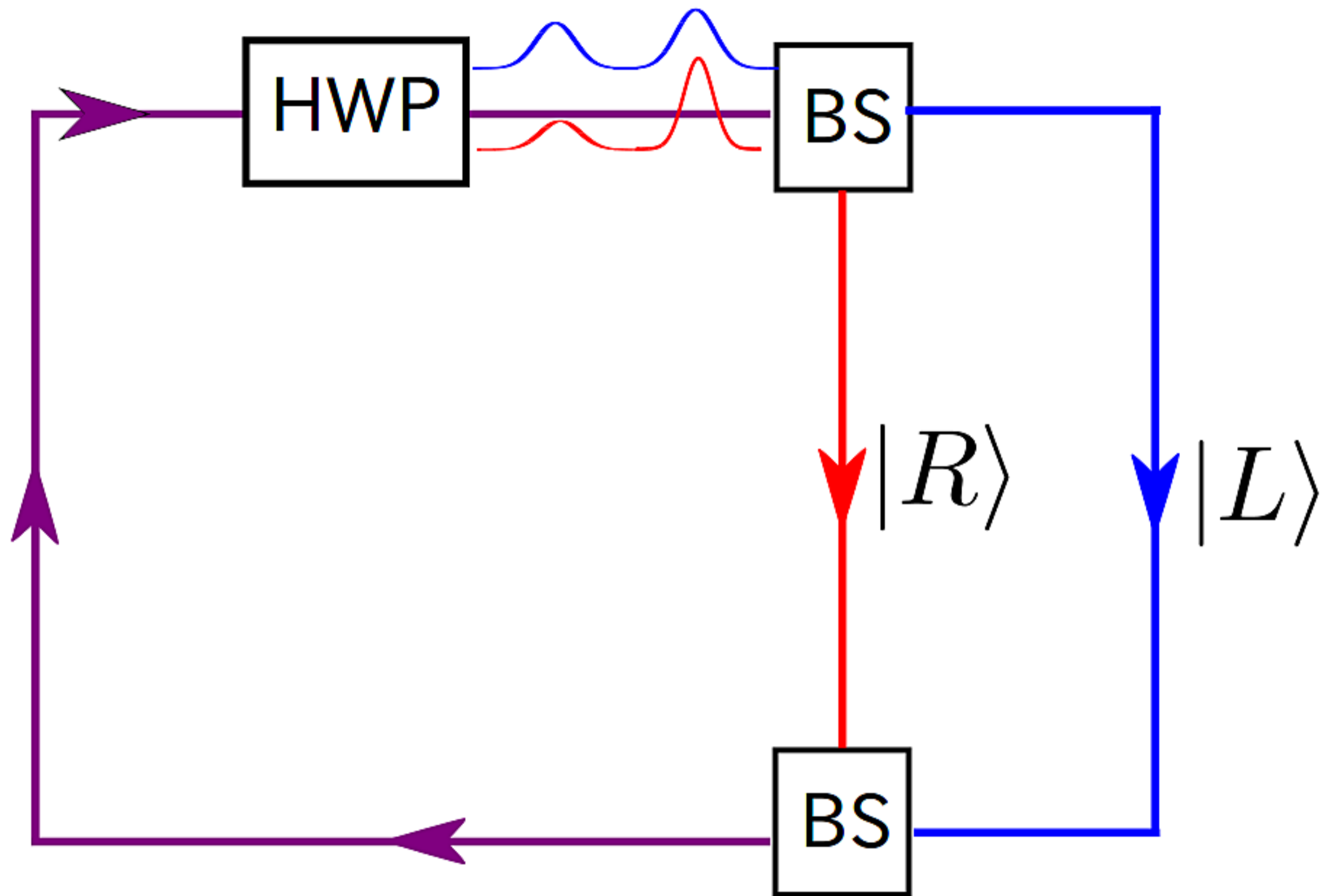
光ファイバーループ1-2



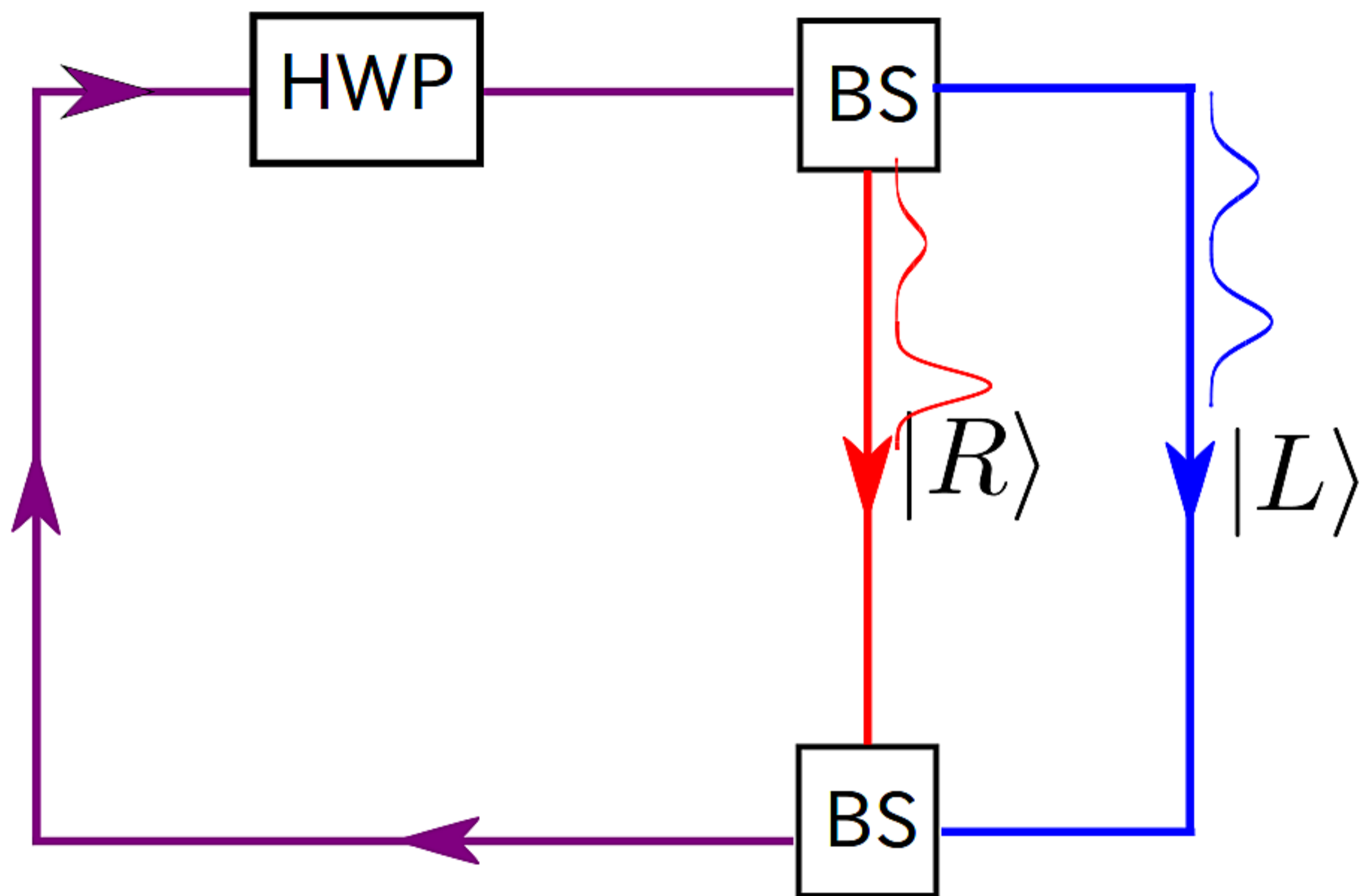
光ファイバーループ1-3



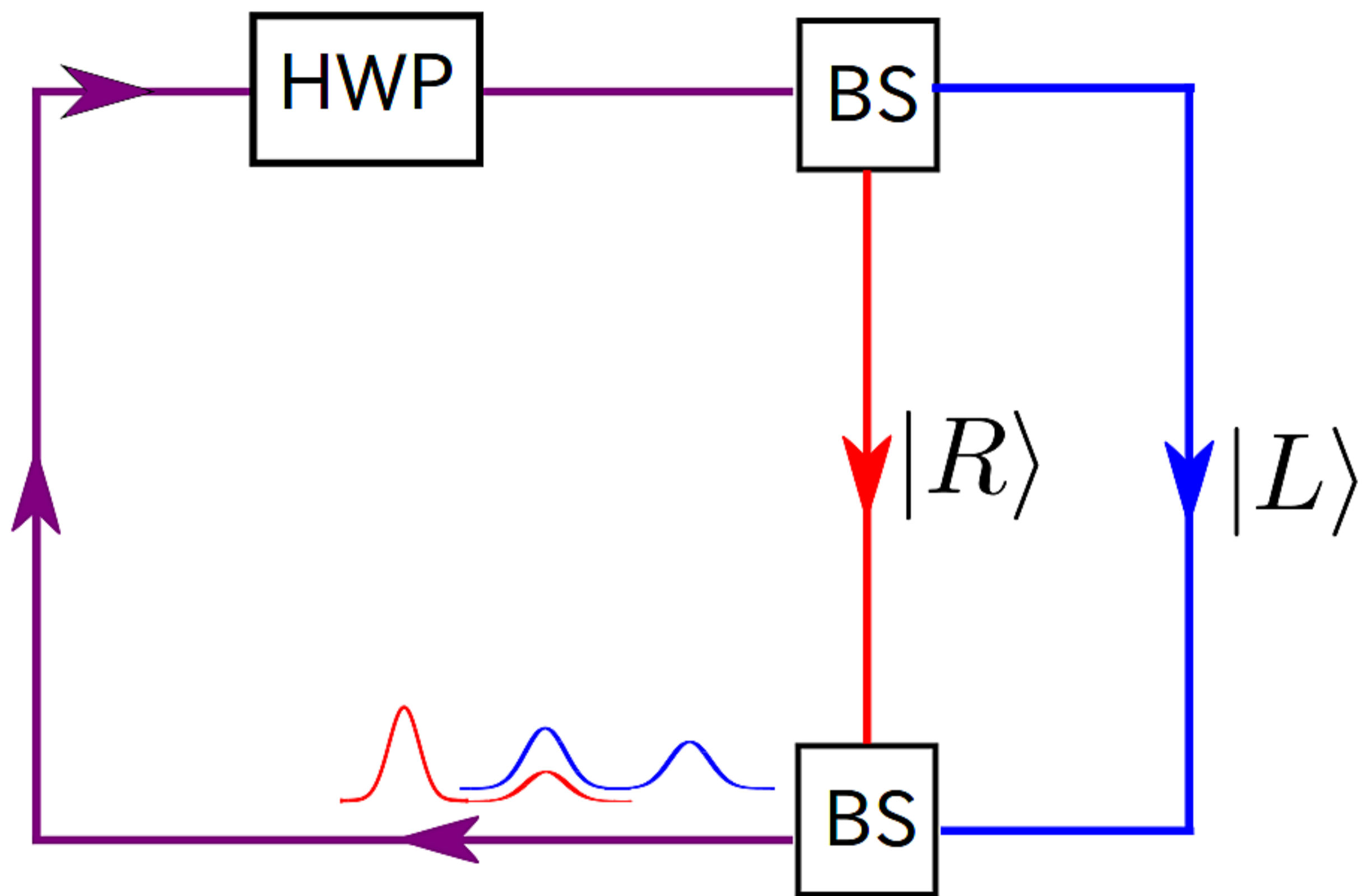
光ファイバーループ2-1



光ファイバーループ2-2



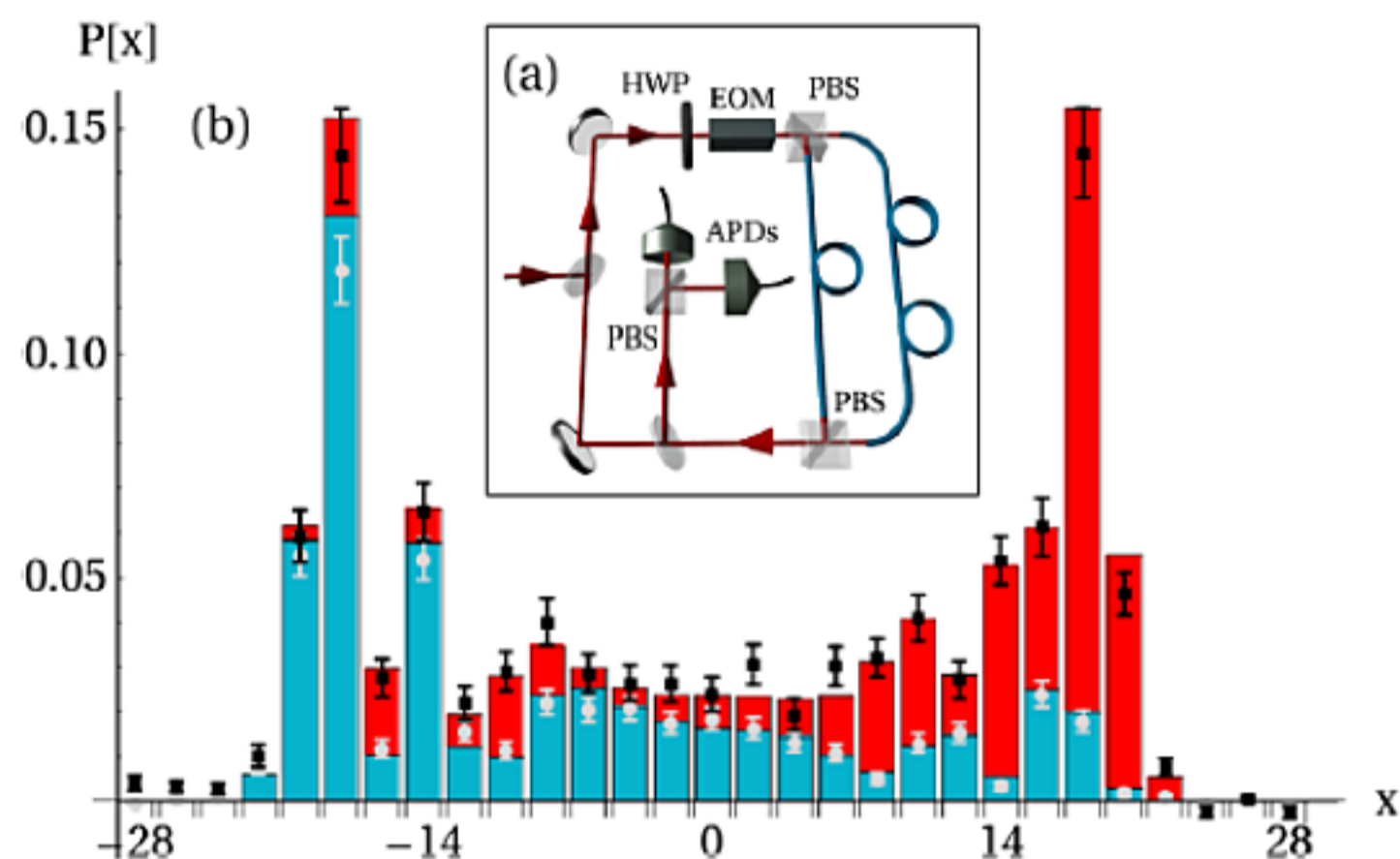
光ファイバーループ2-3



様々な量子ウォークの実験

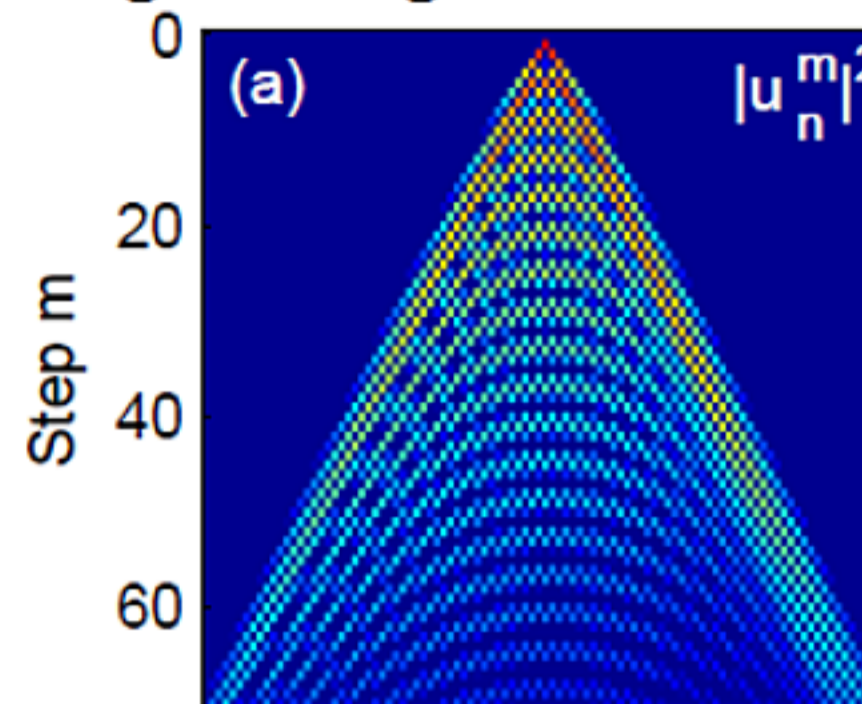
- 光ファイバーループ (28 steps)

Schreiber *et al.* PRL '11



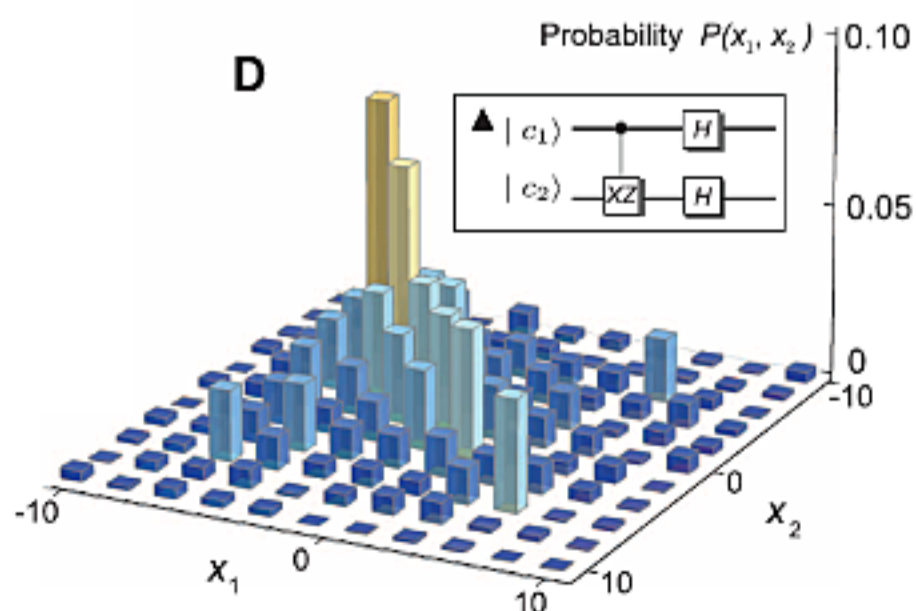
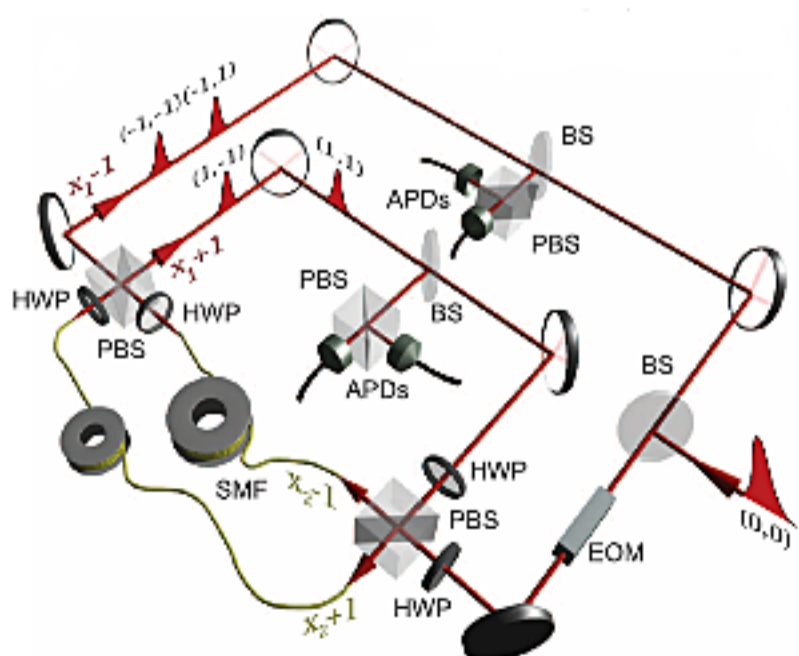
- 光ファイバーループ (70 steps)

Regensburger *et al.* PRL '11



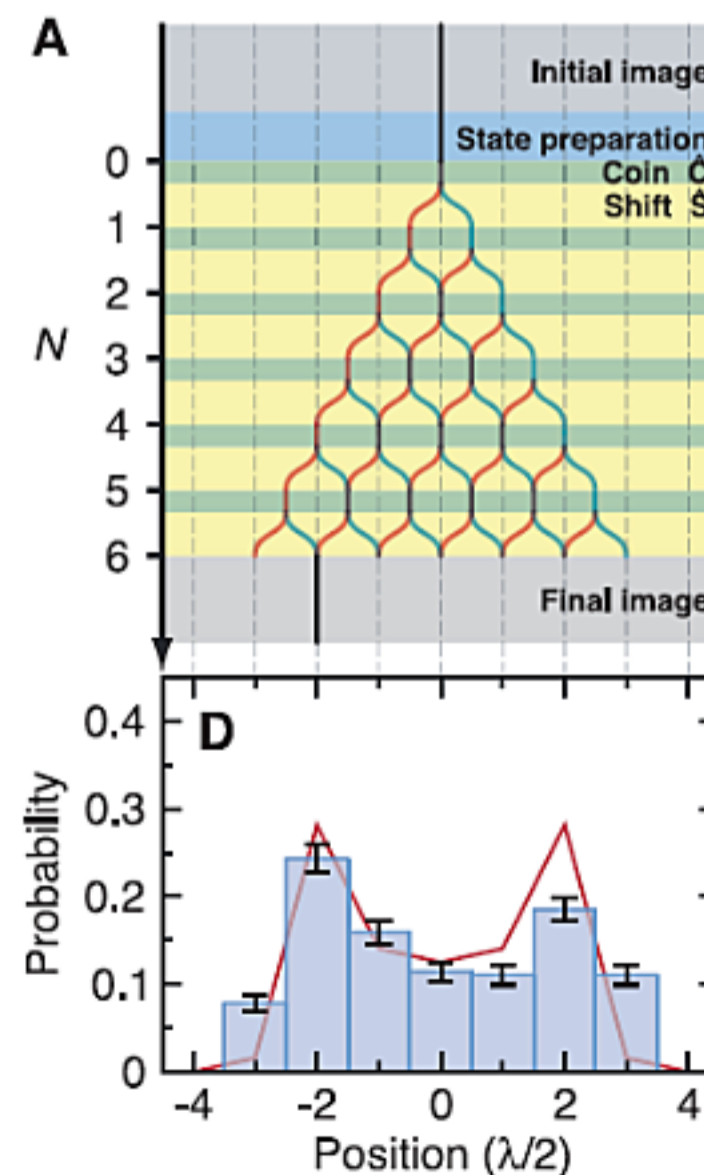
- 光ファイバーループ (2次元量子ウォーク)

Schreiber *et al.* Science '12

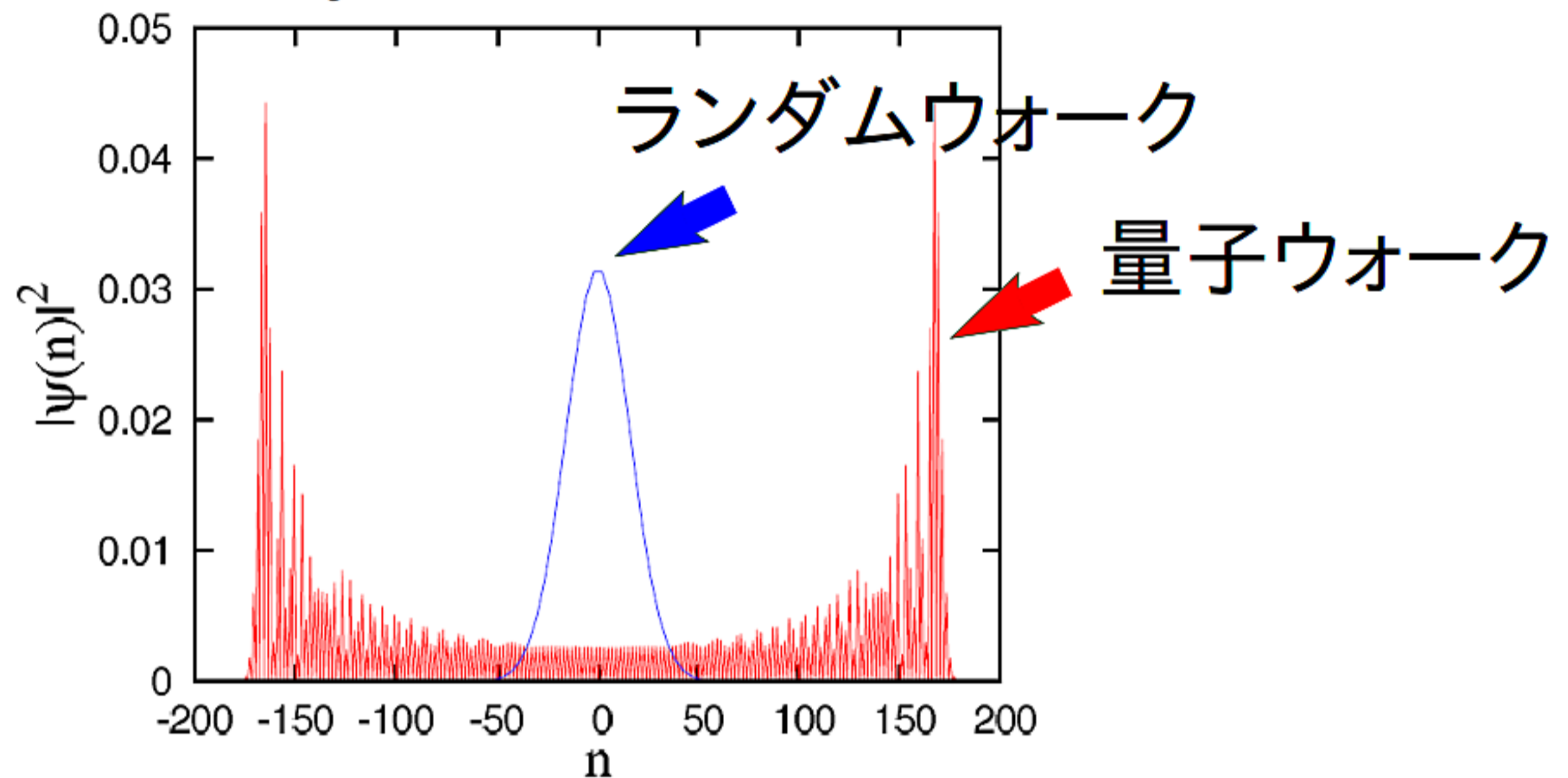


- 冷却原子

Karski *et al.* Science '09



t秒後の存在確率分布



量子ウォークはランダムウォークよりも早く広がることができる



- 量子情報への応用
- 2009年以降、実験も急速に発展
- 量子シミュレーターとして活用

トポロジカル絶縁体/超伝導体

非エルミートハミルトニアン

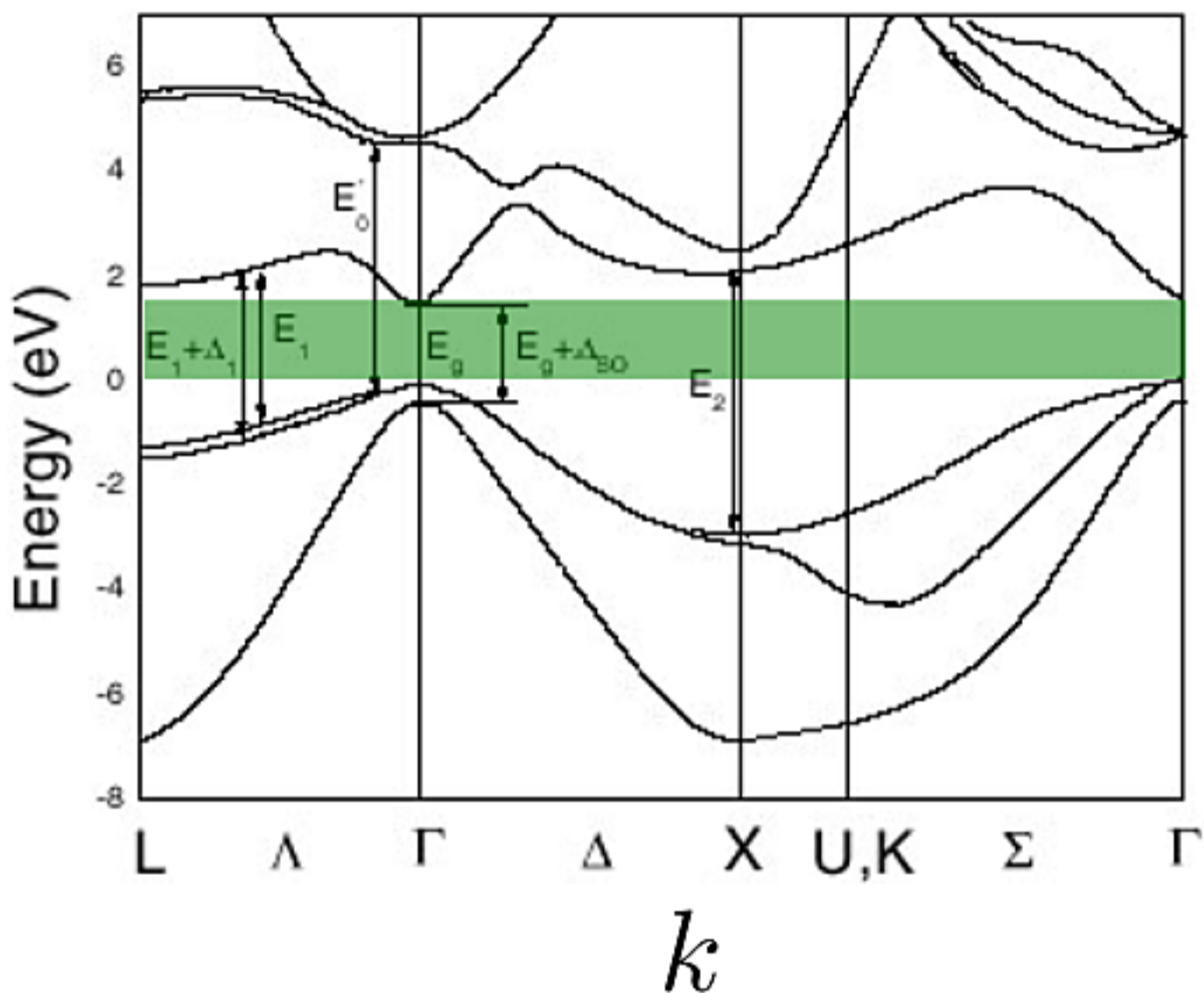
非線形効果

2.トポロジカル絶縁体

トポロジカル絶縁体

● バンド絶縁体

(GaAsのバンド構造)

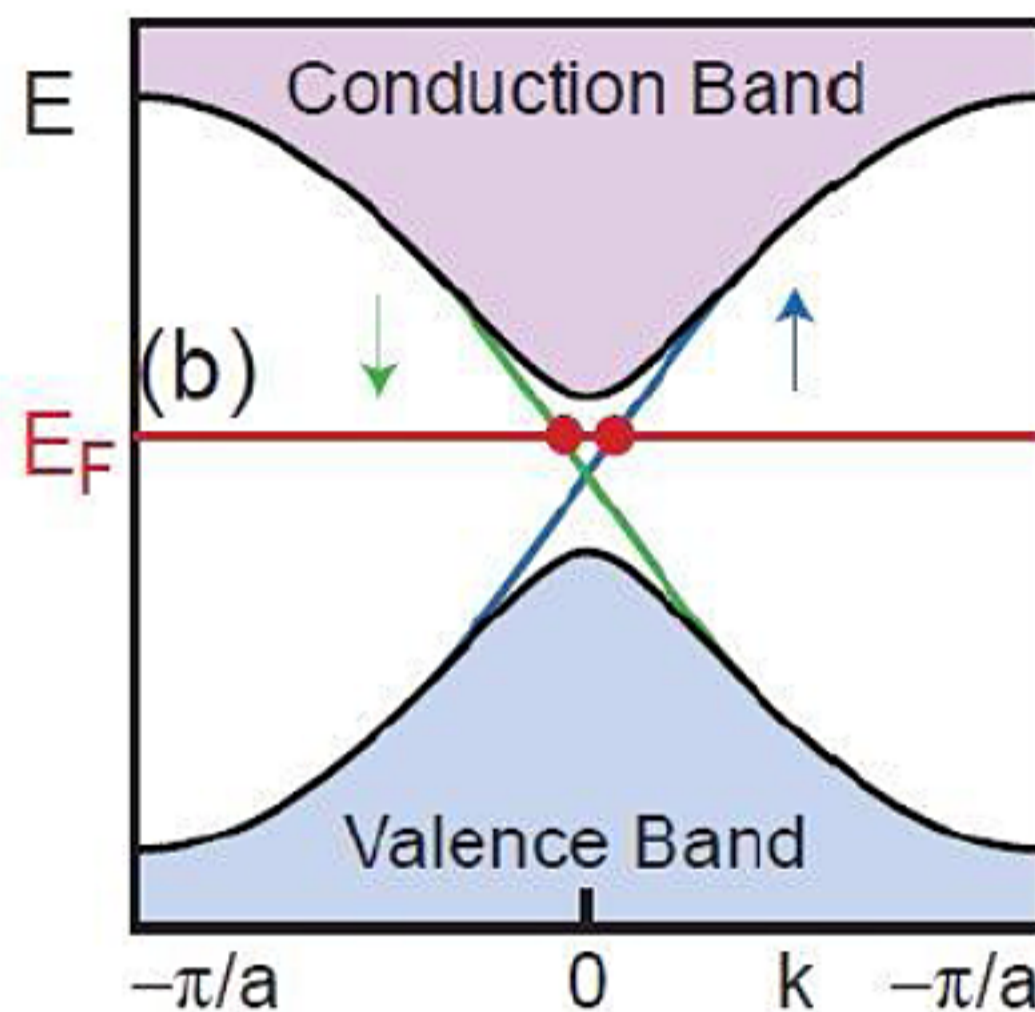


バンドギャップが存在

トポロジカル数 = 0

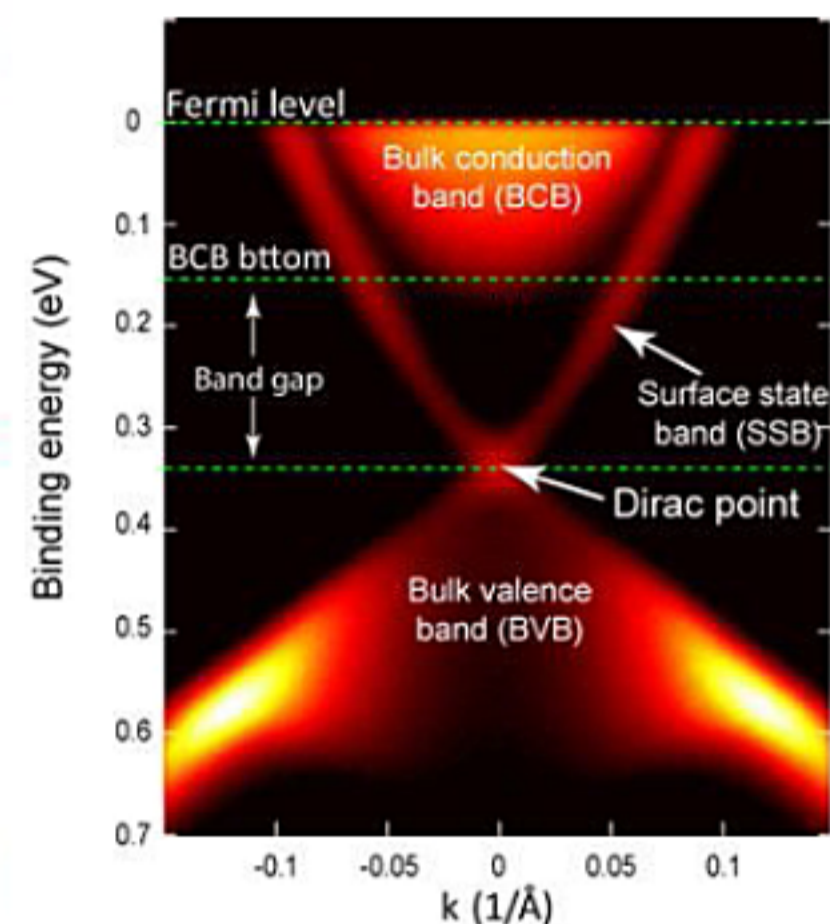
● トポロジカル絶縁体

Kane, Mele (05)



バンドギャップが存在
ギャップ間に表面状態が存在

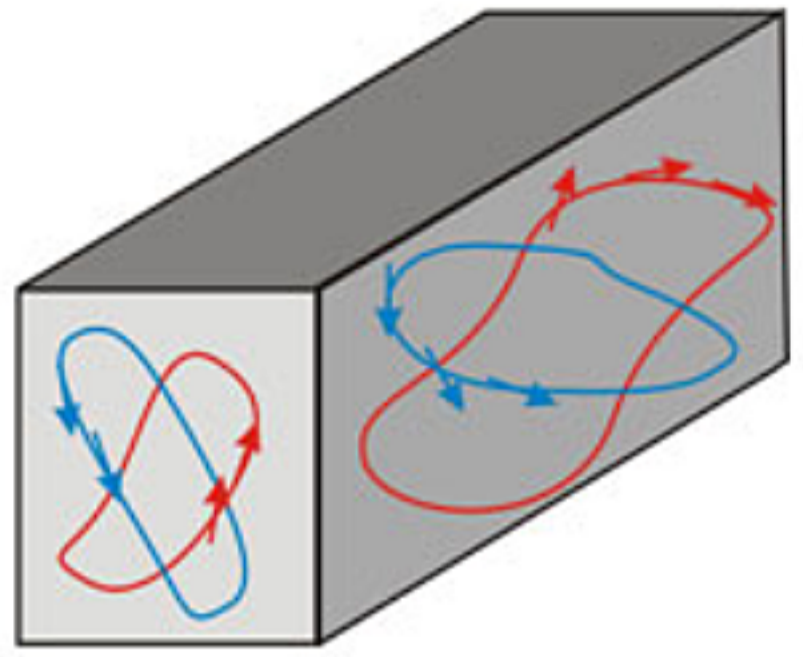
トポロジカル数 $\neq 0$



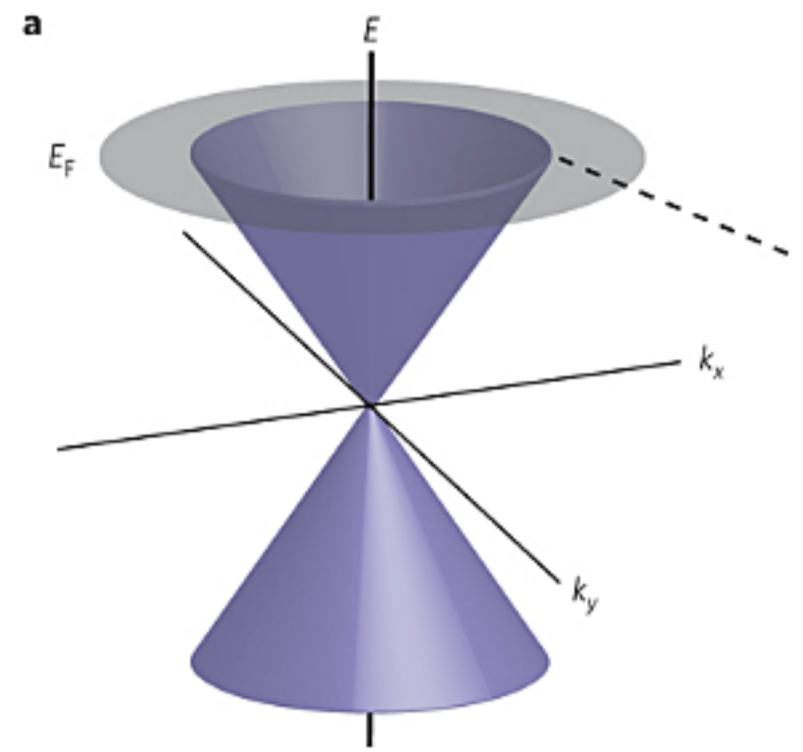
Bi2Se3
Hasan ('09)

1,2,3次元における表面状態と分散関係

● 3次元

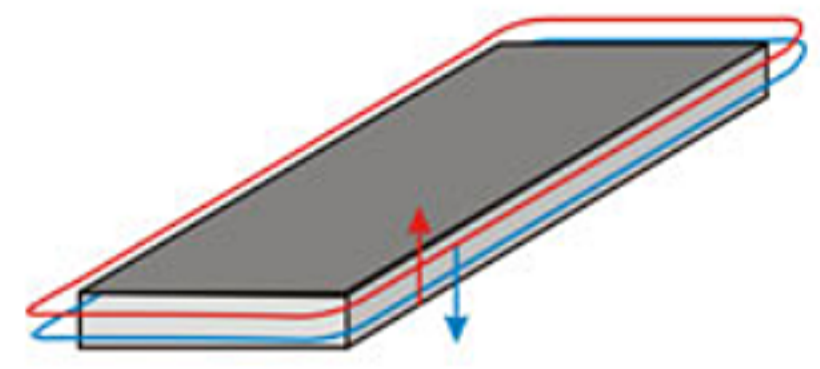


2次元表面状態

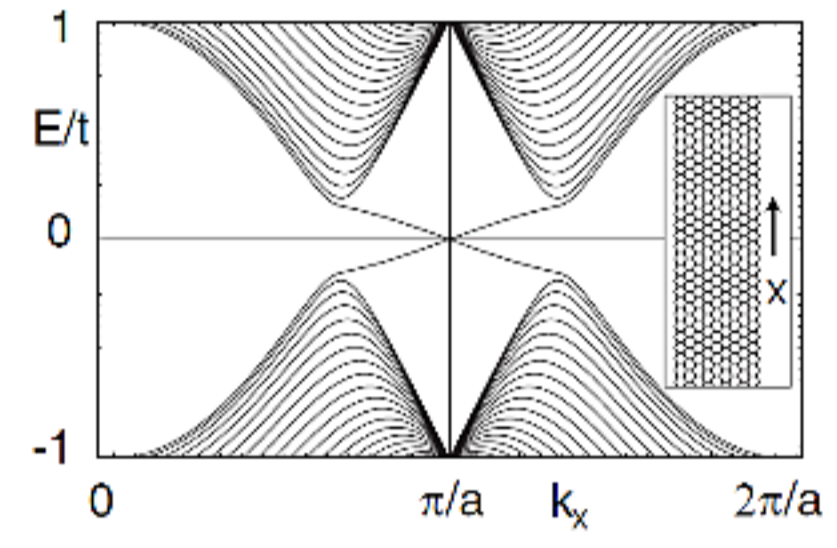


Dirac cone

● 2次元



1次元表面状態

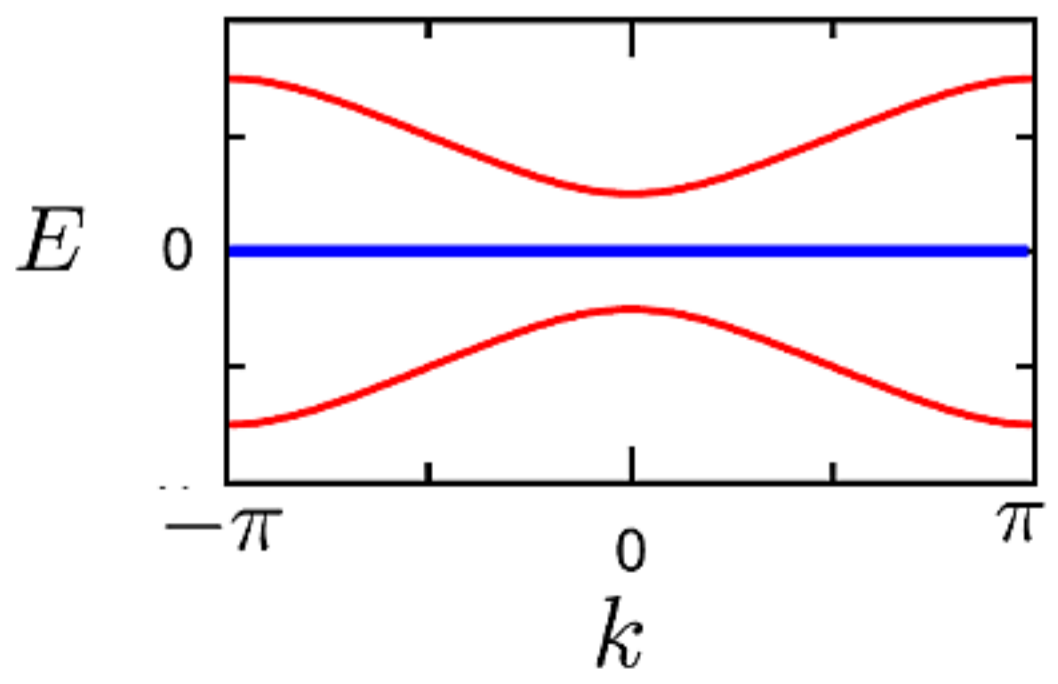


一方向のみ線形分散

● 1次元



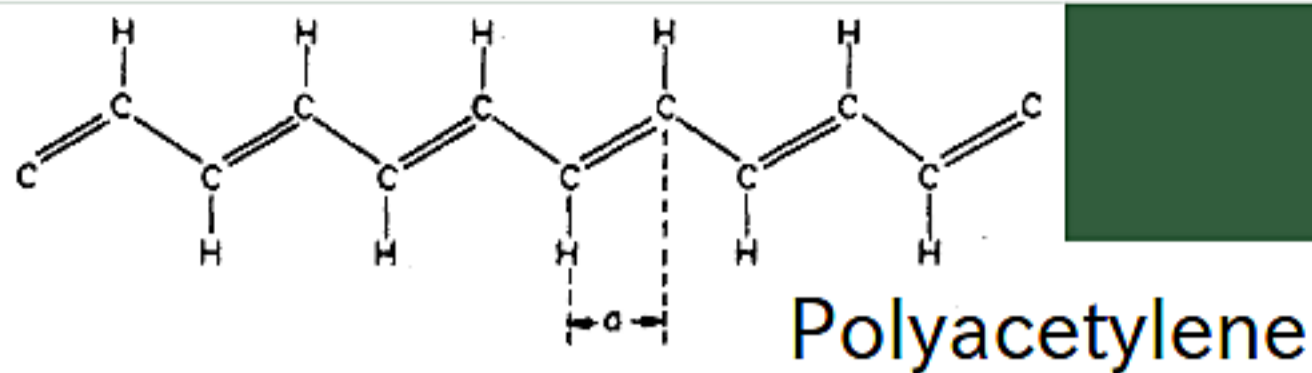
0次元(局在)



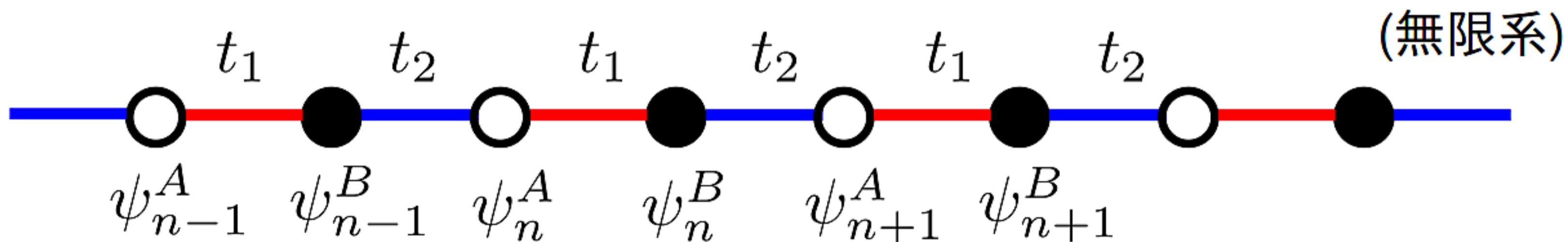
フラット・バンド

マヨラナ粒子:
 粒子=反粒子
 $\gamma = \gamma^\dagger$
 robustな量子計算

1次元TI:SSHモデル



- SSHモデル (Su, Schrieffer, Heeger, PRL '79)



- ハミルトニアン(実空間)

$$E\psi_n^A = t_1\psi_n^B + t_2\psi_{n-1}^B$$

$$E\psi_n^B = t_1\psi_n^A + t_2\psi_{n+1}^A$$

- ハミルトニアン(波数空間)

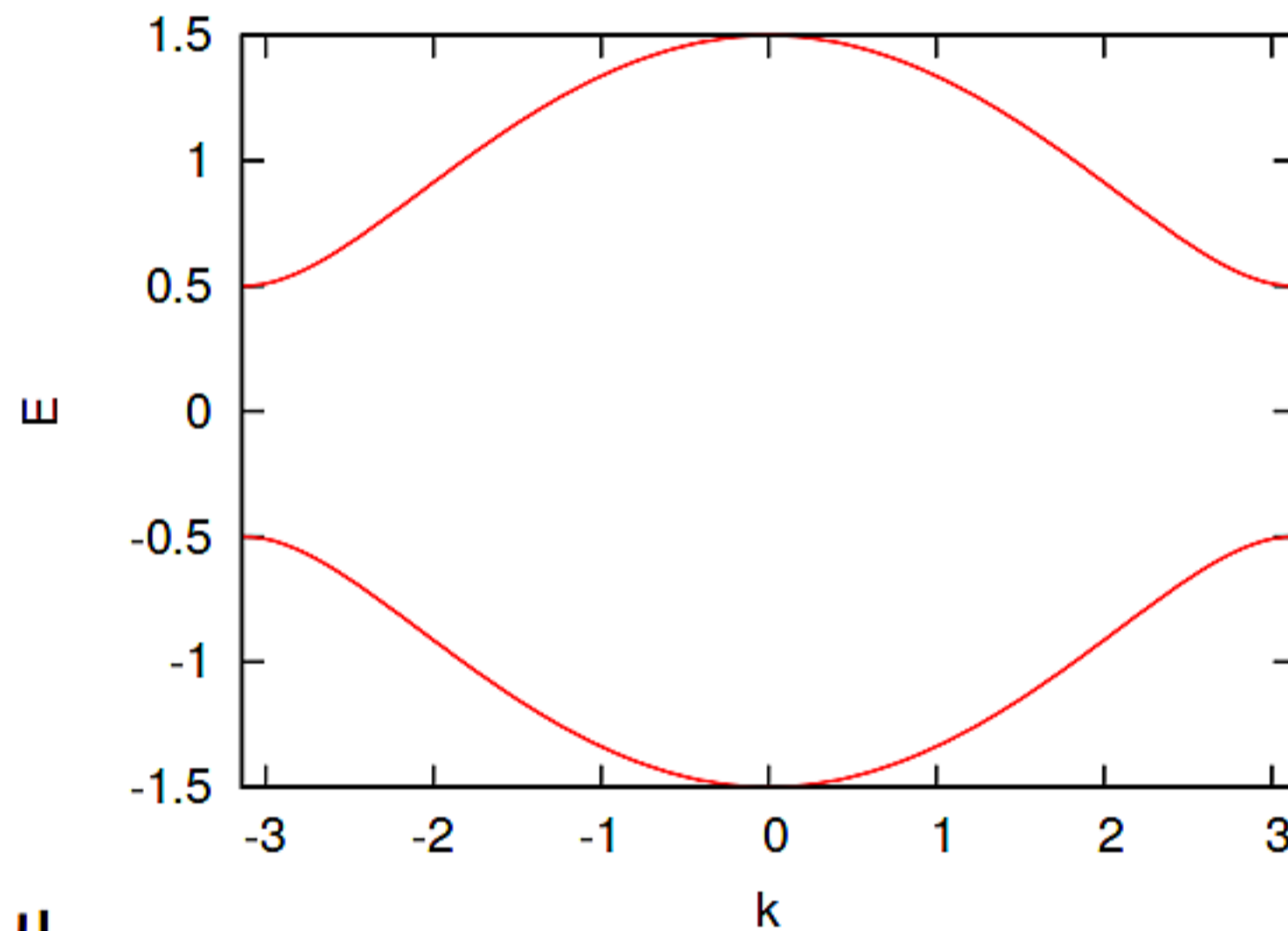
$$\psi_n^x = e^{ikn} u_k^x \quad (x = A, B) \quad : \text{ブロッホ波動関数}$$

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

SSHモデルの固有値・固有ベクトル

● 固有値

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos k}$$



↑ エネルギーギャップ:
↓ $2|t_1 - t_2|$

● 固有ベクトル

$$\psi_{k-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi(k)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{i\phi(k)} = (t_1 + t_2 e^{-ik}) / E_-$$

SSHモデルのトポロジカル数

●トポロジカル数(Zak位相)

$$N \equiv \frac{i}{\pi} \oint dk \langle \psi_k | \nabla_k | \psi_k \rangle$$
$$= \frac{-1}{2\pi} \oint d\phi(k)$$

$$e^{i\phi(k)} = (t_1 + t_2 e^{-ik}) / E_-$$

Zak位相

結晶中の波数の

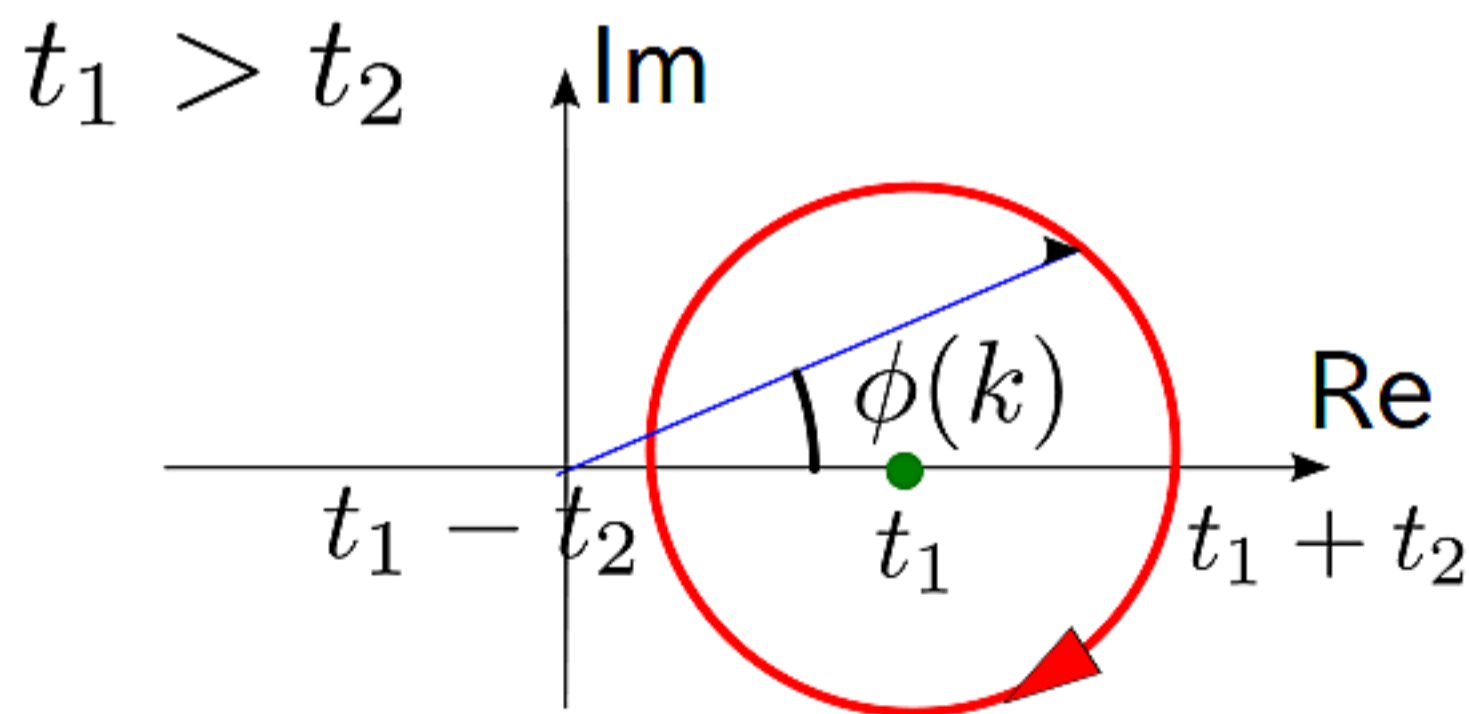
周期性に伴うBerry位相

Berry位相

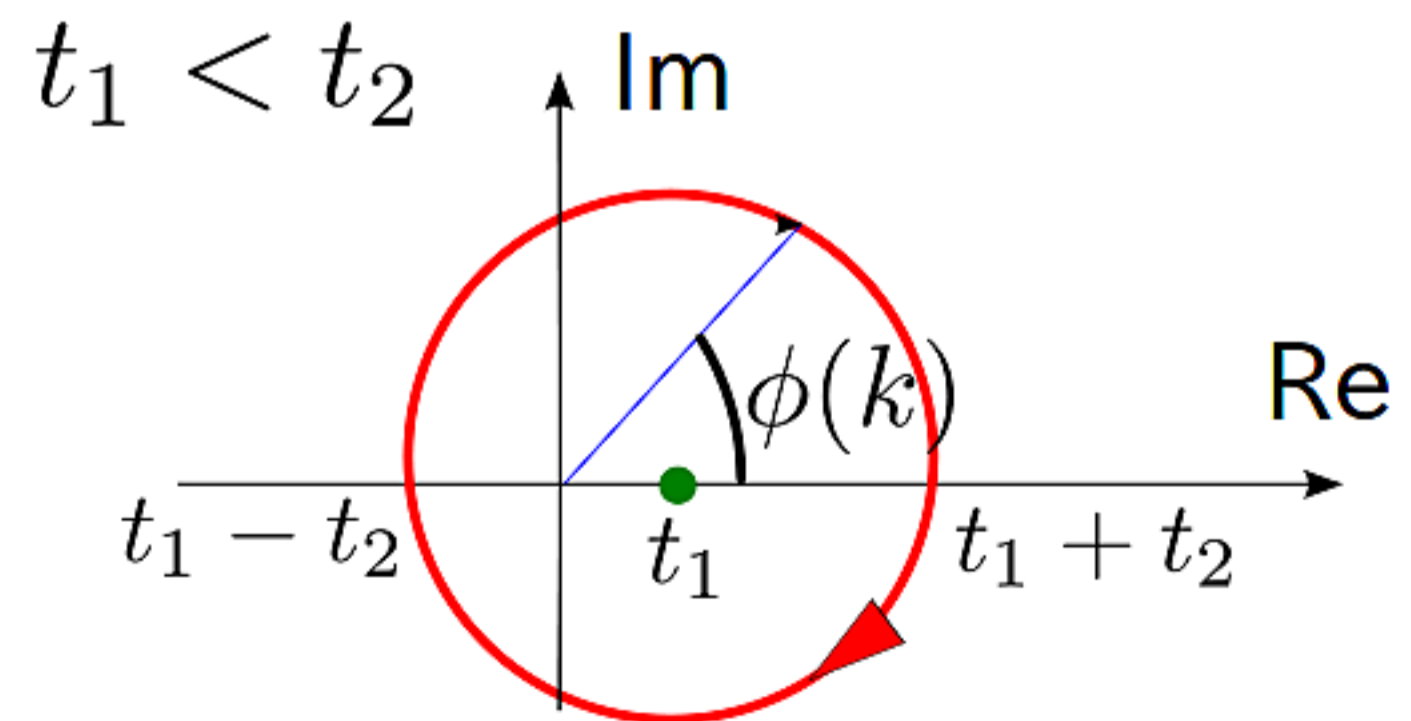
$$H(t) = H_0 + R(t)$$

$$R(t+T) = R(t)$$

$$i \oint dR \langle \psi | \nabla_R | \psi \rangle$$



$$N = 0$$



$$N = 1$$

SSHモデルのトポロジカル数(winding数)

- トポロジカル数(winding数、巻き数)

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h(k) \\ h(k)^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

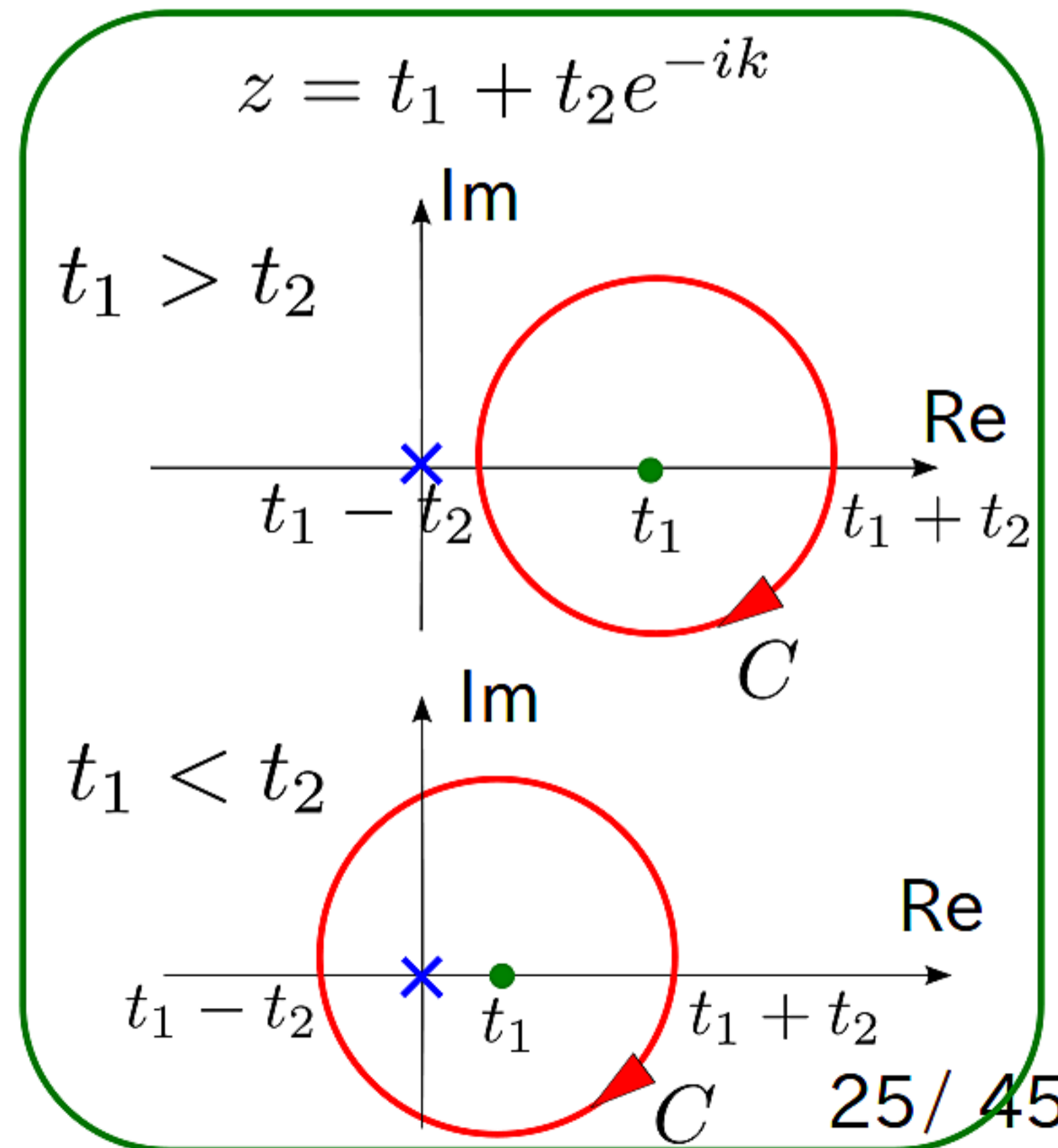
$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} dk \frac{d}{dk} \ln \det h(k)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} dk \frac{-it_2 e^{-ik}}{t_1 + t_2 e^{-ik}}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_C dz \frac{1}{z}$$

$$= \begin{cases} 0 & (t_1 > t_2) \\ 1 & (t_1 < t_2) \end{cases}$$

積分経路が多少変わっても、
トポロジカル数は変わらない



SSHモデルのトポロジカル数(d vector)

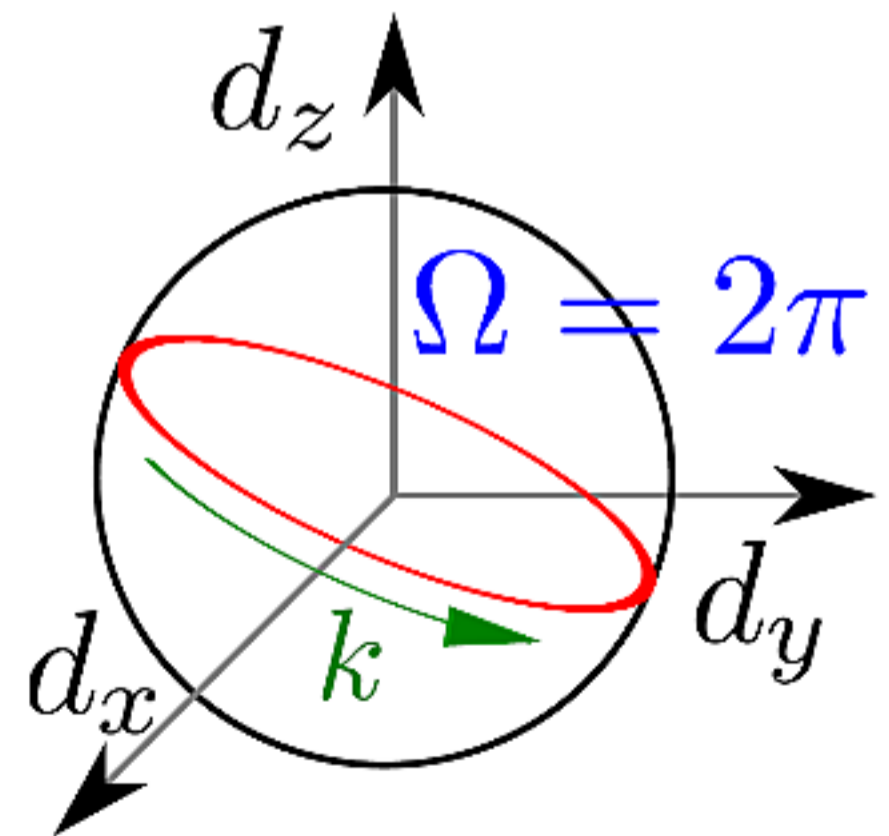
- トポロジカル数(d vector)

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

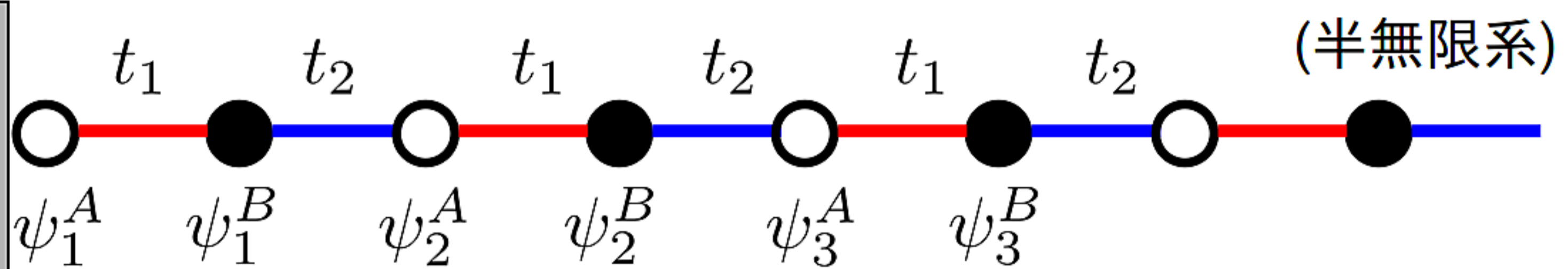
$$= \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{d} = (t_1 + t_2 \cos k, t_2 \sin k, 0)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$



バルク・境界対応



$$E\psi_n^A = t_1\psi_n^B + t_2\psi_{n-1}^B$$

$$E\psi_n^B = t_1\psi_n^A + t_2\psi_{n+1}^A$$

$E = 0$ の時、

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}^A &= (-1)^n \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n \psi_1^A \\ &= (-1)^n e^{n \ln(t_1/t_2)} \psi_1^A \\ &= (-1)^n e^{-n |\ln(t_1/t_2)|} \psi_1^A \quad (t_2 > t_1)\end{aligned}$$

トポロジカル数 \longleftrightarrow エッジ状態の数

(ギャップを閉じる or 対称性を破らない限り)

エッジ状態は、系の摂動に対して強い

トポロジカル相と対称性

- 時間反転対称性

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H$$

$$\mathcal{T}^2 = \pm 1$$

anti-unitary

(complex conjugate)

- 粒子-ホール対称性

$$\mathcal{P}H\mathcal{P}^{-1} = -H$$

$$\mathcal{P}^2 = \pm 1$$

anti-unitary

- カイラル対称性

$$\Gamma H\Gamma^{-1} = -H$$

$$\Gamma = \mathcal{TP}$$

unitary

universality class		TRS	PHS	chiral symmetry	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
Standard (Wigner-Dyson)	A	0	0	0	-	\mathbb{Z}	-
	AI	+1	0	0	-	-	-
	AII	-1	0	0	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
Chiral	AIII	0	0	1	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}
	BDI	+1	+1	1	\mathbb{Z}	-	-
	CII	-1	-1	1	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2
BdG	D	0	+1	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-
	C	0	-1	0	-	\mathbb{Z}	-
	DIII	-1	+1	1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
	CI	+1	-1	1	-	-	\mathbb{Z}

Schnyder, Ryu, Furusaki, Ludwig, PRB '08; Kitaev, AIP Conf. '09

SSHモデルの対称性

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

- 時間反転対称性

$$\mathcal{K}H(k)\mathcal{K}^{-1} = H(-k)$$

- カイラル対称性

$$\sigma_3 H(k) \sigma_3^{-1} = -H(k)$$

- 粒子-ホール対称性

$$\sigma_3 \mathcal{K} H(k) (\sigma_3 \mathcal{K})^{-1} = -H(-k)$$

chiral orthogonal (class BDI)に属する

3.量子ウォークにおける トポロジカル相

Theory:

Kitagawa, Rudner, Berg, Demler, PRA '10

Experiment:

Kitagawa, Broome, Fedrizzi, *et al.*, Nature Comm. '12

量子ウォークにおけるトポロジカル相

Kitagawa *et al.* PRA '10

- 時間発展演算子とハミルトニアン

$$U = \exp(-iH\delta t)$$

- 時間反転対称性

$$THT^{-1} = H \quad \Rightarrow \quad TUT^{-1} = U^\dagger = U^{-1}$$

- 粒子-ホール対称性

$$PHP^{-1} = -H \quad \Rightarrow \quad PUP^{-1} = U$$

U の成分が実数

- カイラル対称性

$$\Gamma H \Gamma^{-1} = -H \quad \Rightarrow \quad \Gamma U \Gamma^{-1} = U^\dagger = U^{-1}$$

対称性の制御が可能

粒子-ホール対称性が容易に保たれる

トポロジカル相を調べる上で理想的な実験場

量子ウォークの有効ハミルトニアン

Kitagawa *et al.* PRA '10

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$
$$S = \sum_k |k\rangle\langle k| \otimes \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix}$$

(波数空間におけるシフト演算子)

$$\Rightarrow U = \exp(-iH\delta t)$$

量子ウォークの有効ハミルトニアン

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} dk [\omega(k) \mathbf{d}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes |k\rangle\langle k|],$$
$$\mathbf{d}(k) = [\sin(\theta) \sin k, \sin(\theta) \cos k, -\cos(\theta) \sin k] / \sin \omega(k),$$
$$\omega(k) = \pm \arccos [\cos(k) \cos(\theta)] + 2n\pi.$$

カイラル対称性: $\Gamma H \Gamma^{-1} = -H$

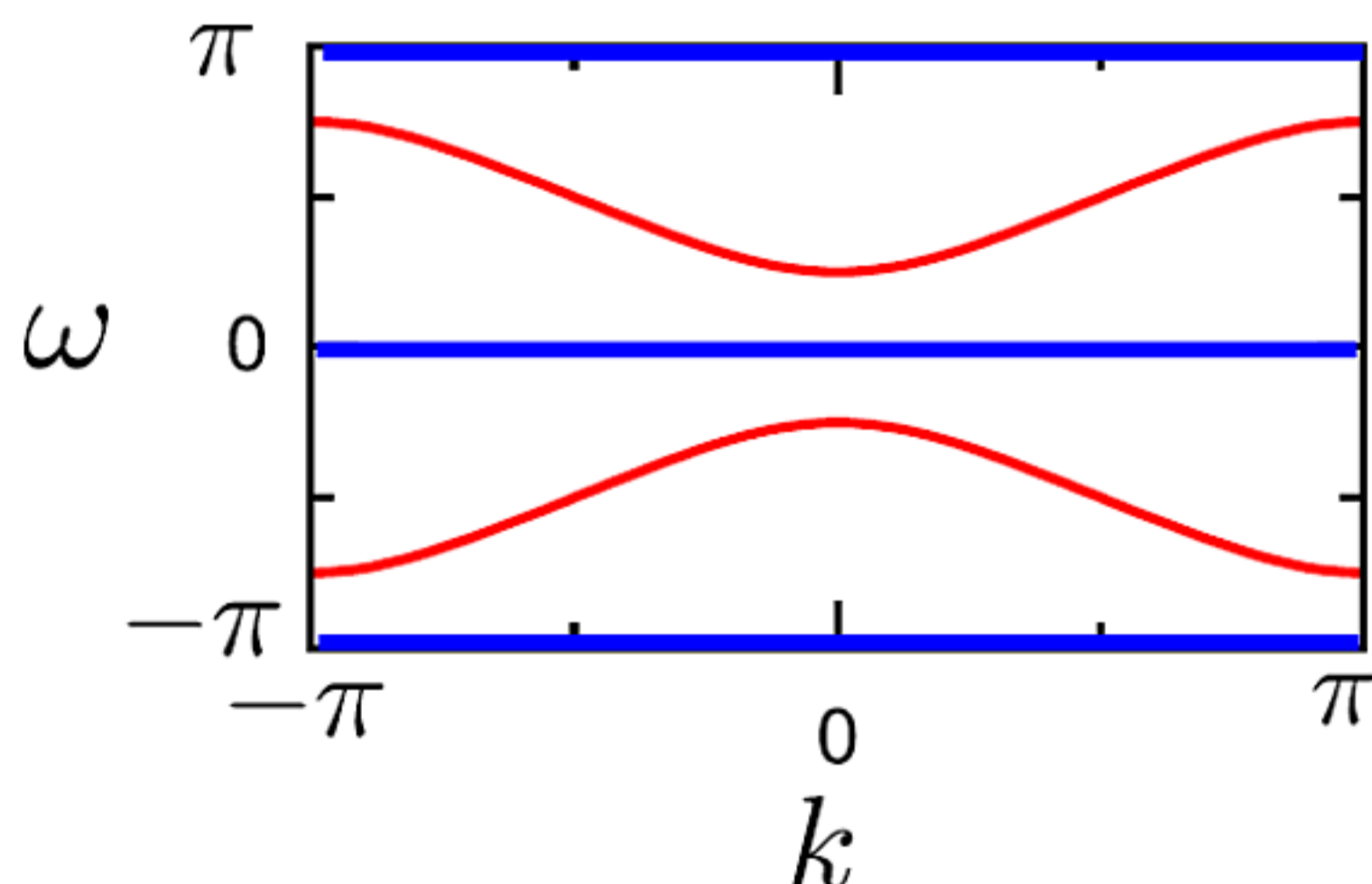
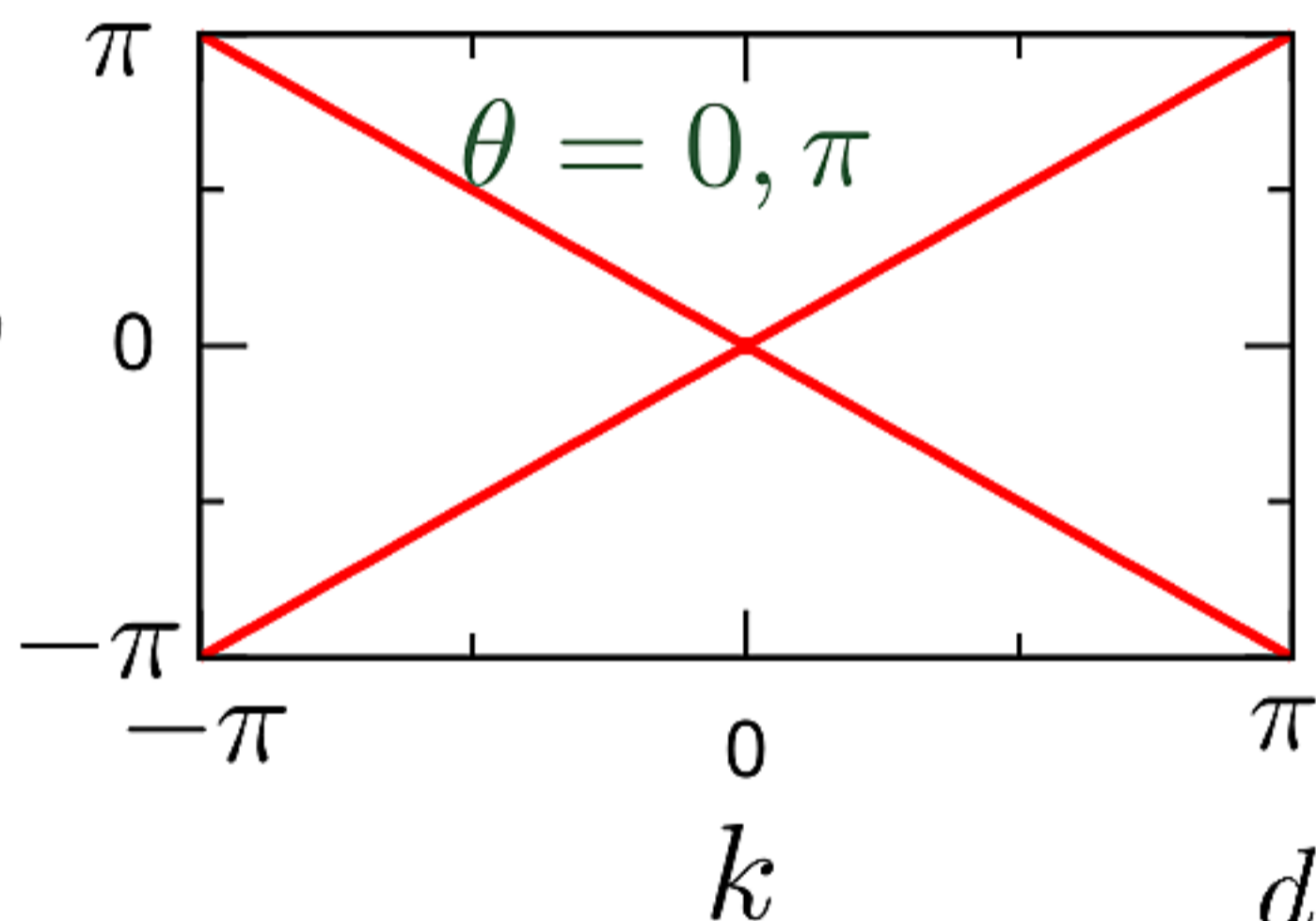
$$\Gamma = \exp \{ -i\pi [\cos \theta(x) \sigma_1 + \sin \theta(x) \sigma_3] \}$$

量子ウォークのトポロジカル数

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} dk [\omega(k) \mathbf{d}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes |k\rangle\langle k|],$$

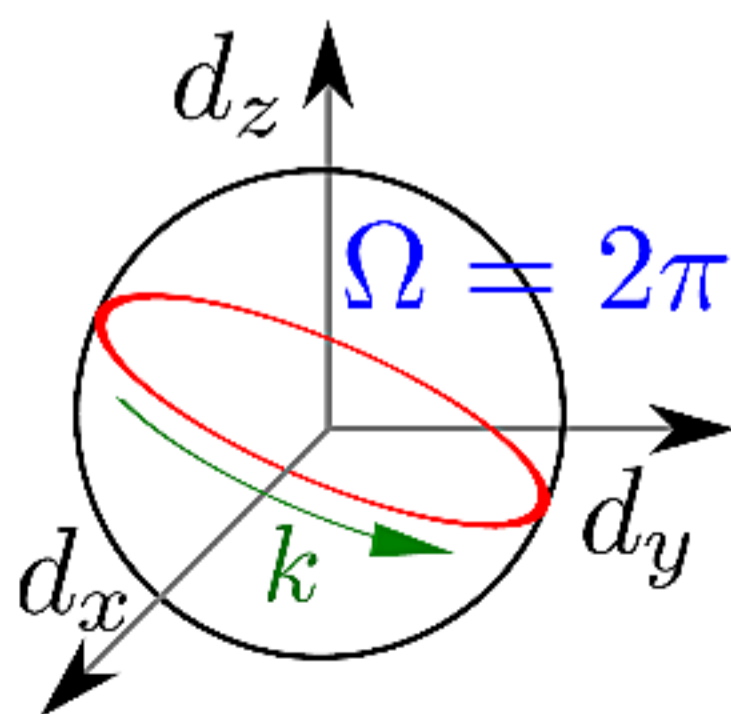
$$\mathbf{d}(k) = [\sin(\theta) \sin k, \sin(\theta) \cos k, -\cos(\theta) \sin k] / \sin \omega(k),$$

$$\omega(k) = \pm \arccos [\cos(k) \cos(\theta)] + 2n\pi.$$



$$U\psi = e^{i\omega} \psi$$

$\omega : 2\pi$ 周期性

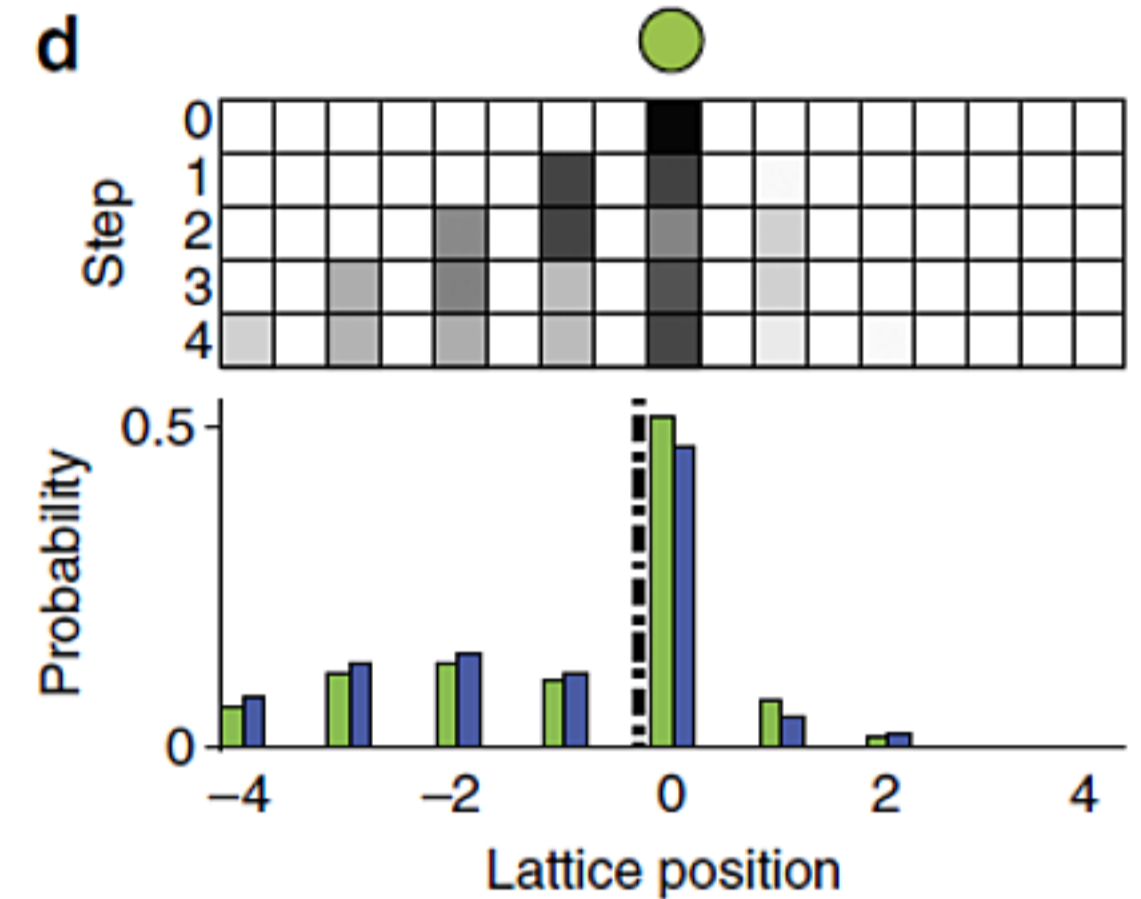
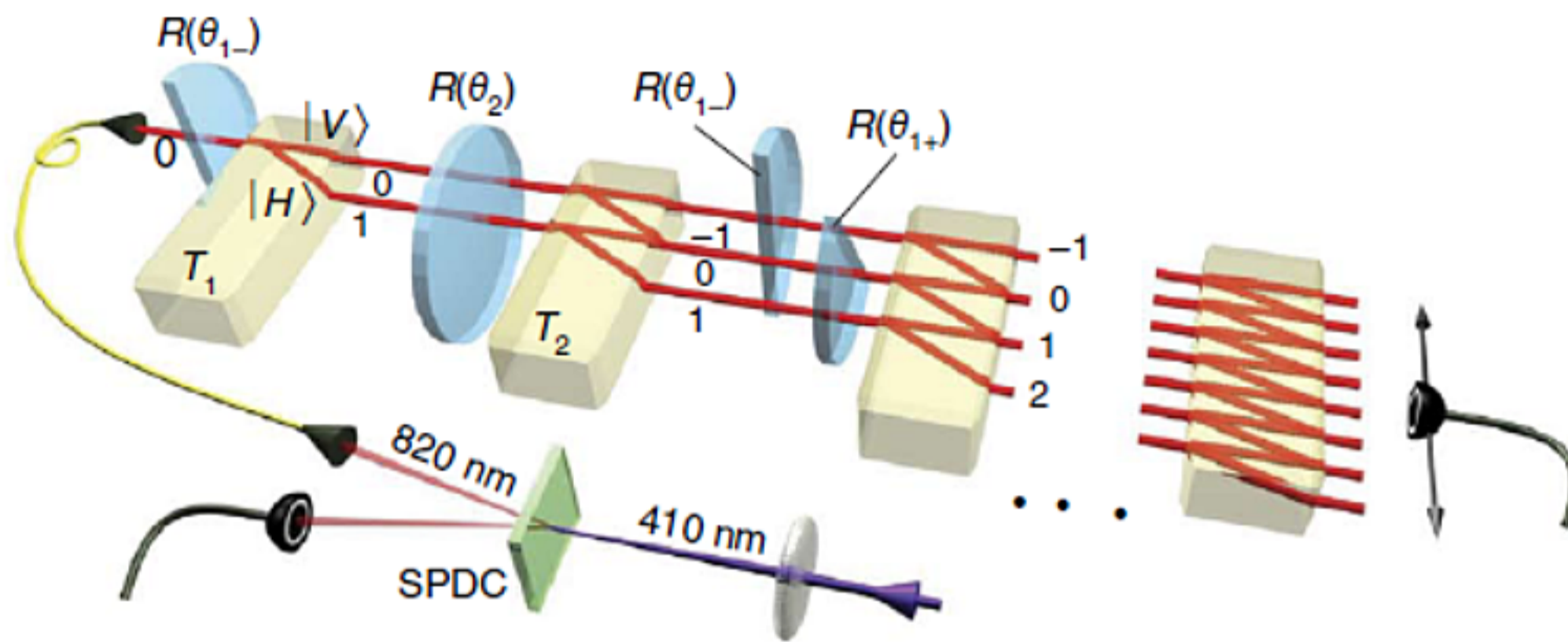


有限のトポロジカル数

実験によるエッジ状態の観測

● 光学系

Kitagawa *et al.* Nature Comm. '12



内部自由度：縦・横偏向

HWP (half wave plate)

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Beam displacer

$$S = S_+ S_-$$

カイラル・ph対称性

\mathcal{Z} トポロジカル相

エッジ状態(class BDI)の観測

4.カイラル対称性を有する 量子ウォークのトポロジカル相

Asboth and HO, PRB ('13)

量子ウォークにおけるカイラル対称性

- カイラル対称性: $\Gamma H \Gamma^{-1} = -H, \quad \Gamma U \Gamma^{-1} = U^\dagger$

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} dk [\omega(k) \mathbf{d}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes |k\rangle\langle k|],$$

$$\mathbf{d}(k) = [\sin(\theta) \sin k, \sin(\theta) \cos k, -\cos(\theta) \sin k] / \sin \omega(k),$$

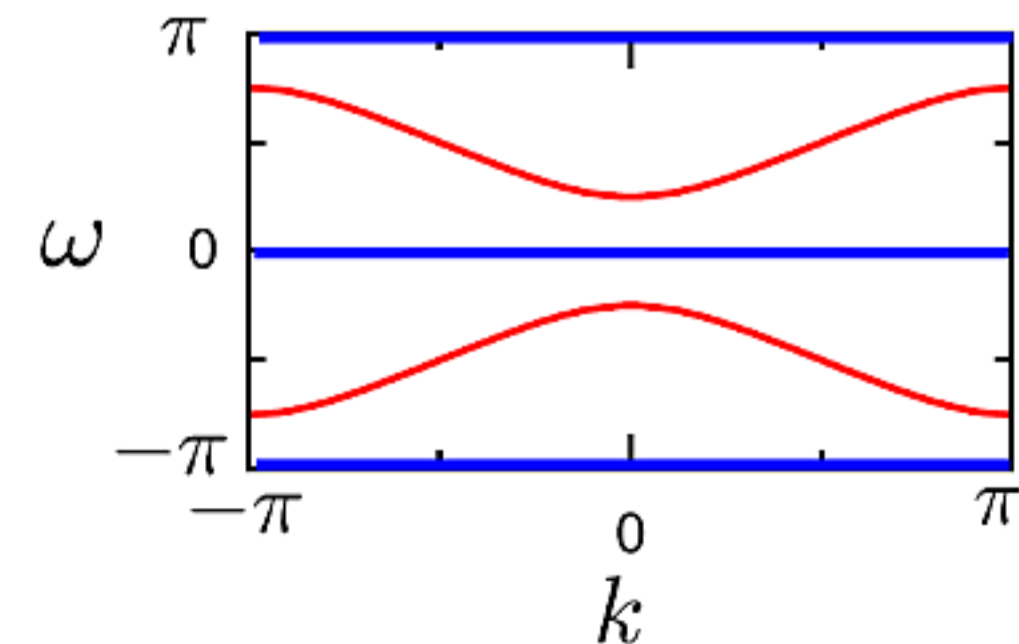
$$\omega(k) = \pm \arccos [\cos(k) \cos(\theta)] + 2n\pi.$$

$$\Gamma = \exp \{ -i\pi [\cos \theta(x) \sigma_1 + \sin \theta(x) \sigma_3] \}$$

Kitagawa et al. PRA '10

- 問題点:

1. Γ が $\theta(x)$ に依存する
2. $\omega = 0, \pi$ のどちらのトポロジカル数?



量子ウォークのカイラル対称性

- カイラル対称性: $\Gamma U \Gamma^{-1} = U^{-1}$
 $U = S \mathcal{R} = S_- S_+ \mathcal{R}$
 $U^{-1} = \mathcal{R}^{-1} S_+^{-1} S_-^{-1}$

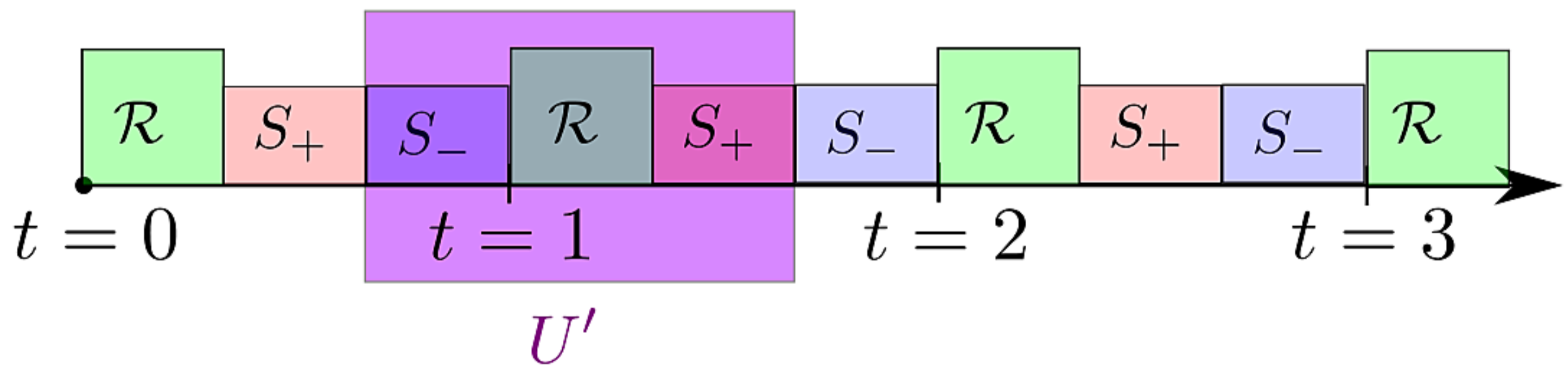
コインとシフト演算子の順番が入れ替わってしまう

$$\mathcal{R} = \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes C(\theta(x))$$

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \exp(-i\theta \sigma_2)$$

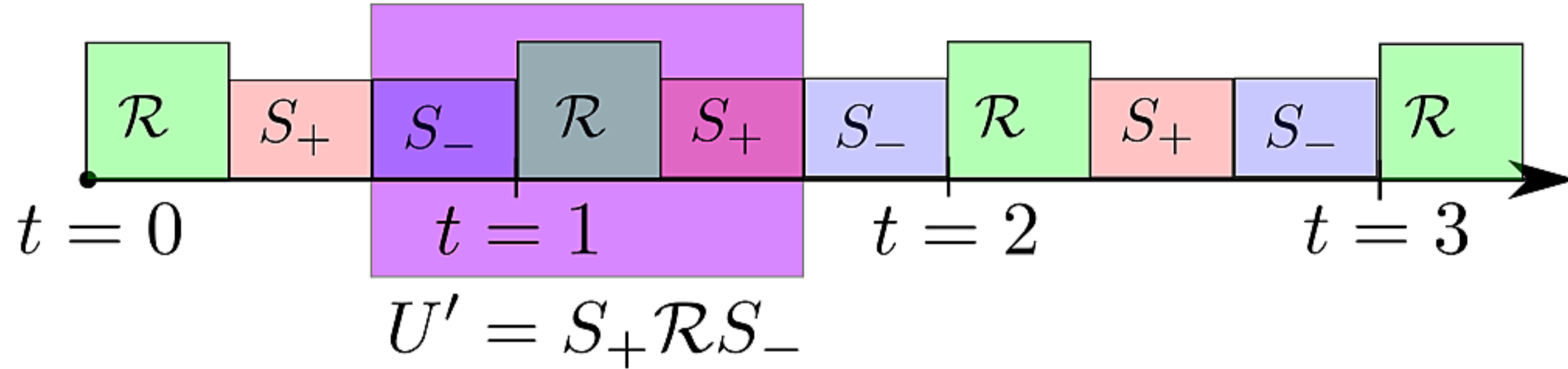
$$S_+ = \sum_x |x+1, R\rangle \langle x, R|$$

$$S_- = \sum_x |x-1, L\rangle \langle x, L|$$



$$U' = S_+ \mathcal{R} S_-$$

量子ウォークのカイラル対称性 $\Gamma U \Gamma^{-1} = U^{-1}$



仮定:

$$\Gamma = \sigma_1$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 (S_+ \mathcal{R} S_-) \sigma_1 &= [\sigma_1 S_+ \sigma_1] [\sigma_1 \mathcal{R} \sigma_1] [\sigma_1 S_- \sigma_1] \\ &= S_-^{-1} \mathcal{R}^{-1} S_+^{-1} = U'^{-1} \end{aligned}$$

1. コイン演算子が満たすべき条件

$$\sigma_1 C(\theta) \sigma_1 = C(\theta)^{-1}$$

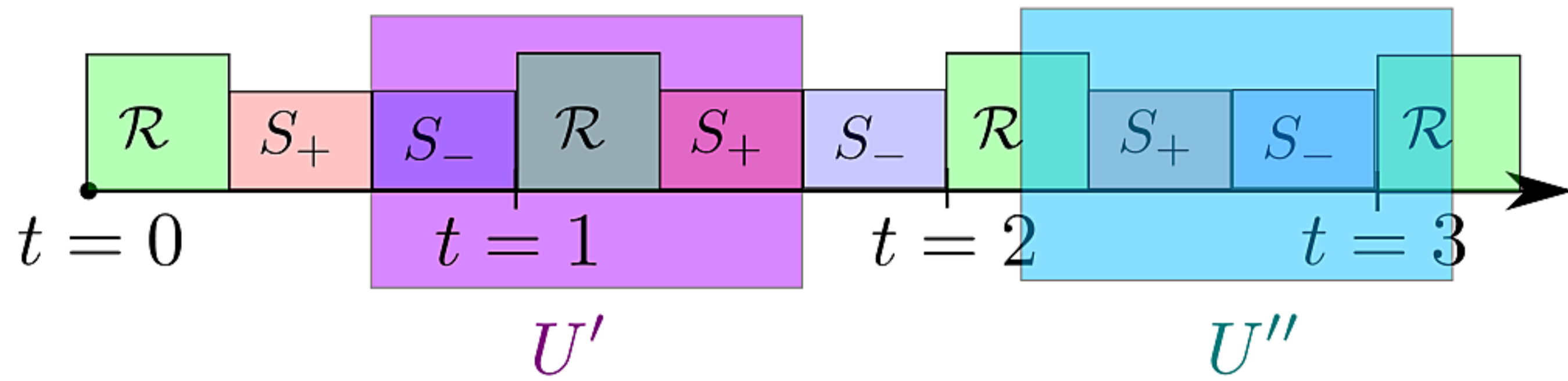
2. シフト演算子が満たすべき条件

$$\sigma_1 S_{\pm} \sigma_1 = S_{\mp}^{-1}$$

- $\sigma_1 C(\theta) \sigma_1 = \sigma_1 \exp(-i\theta \sigma_2) \sigma_1 = \exp(i\theta \sigma_2) = C(-\theta) = C(\theta)^{-1}$

- $\sigma_1 S_+ \sigma_1 = \sigma_1 \sum_x |x+1, R\rangle \langle x, R| \sigma_1 = \sum_x |x+1, L\rangle \langle x, L| = S_-^{-1}$

2種類の時間発展演算子



$$U' = S_+ \mathcal{R}(\theta) S_-$$

$$\begin{aligned} & \sigma_x (S_+ \mathcal{R}(\theta) S_-) \sigma_x \\ = & [\sigma_x S_+ \sigma_x] [\sigma_x \mathcal{R}(\theta) \sigma_x] [\sigma_x S_- \sigma_x] \\ = & S_-^{-1} \mathcal{R}(\theta)^{-1} S_+^{-1} = U'^{-1} \end{aligned}$$

$$U'' = \mathcal{R}(\theta/2) S_- S_+ \mathcal{R}(\theta/2)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_x (\mathcal{R}(\theta/2) S_- S_+ \mathcal{R}(\theta/2)) \sigma_x \\ = & \mathcal{R}(\theta/2)^{-1} S_+^{-1} S_-^{-1} \mathcal{R}(\theta/2)^{-1} \\ = & U''^{-1} \end{aligned}$$

カイラル対称性を有する量子ウォークは
2種類の時間発展演算子を持つ

winding数

- 波数空間表示

$$U' = \sum_k |k\rangle\langle k| \otimes U'(k)$$

- 有効ハミルトニアン

$$H'_{eff} = \sin(H') = [U'^{\dagger}(k) - U'(k)] / 2i$$

- winding数

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & h'(k) \\ h'^{\dagger}(k) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu' = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{d}{dk} \ln \det h'(k)$$

- U'' についても同様に計算

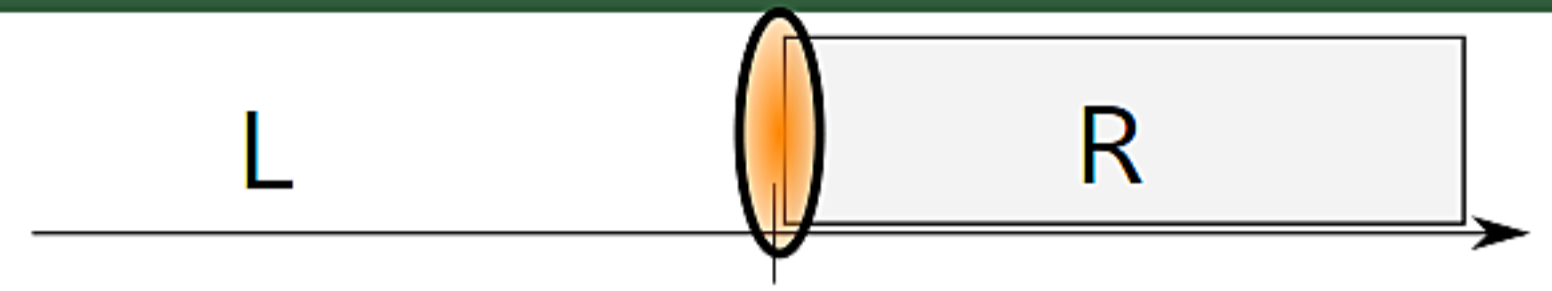
$$\nu' = 0, \quad \nu'' = \begin{cases} 1 & (\theta > 0) \\ -1 & (\theta < 0) \end{cases}$$

異なるwinding数 ν', ν''

$\omega = 0, \pi$ のwinding数の足しあわせ

バルク-境界対応

- 異なる量子ウォークを接合



- カイラル対称性のある系のエッジ状態は A or B 副格子上に存在

A格子上的のエッジ状態数: $m'_A = m'_{A,0} + m'_{A,\pi}$

B格子上的のエッジ状態数: $m'_B = m'_{B,0} + m'_{B,\pi}$

- 0, π エッジ状態のトポロジカル数: $\nu_{L,\omega} - \nu_{R,\omega} = m'_{A,\omega} - m'_{B,\omega}$

- winding数は 0, π エッジ状態数の和: $\nu'_L - \nu'_R = m'_A - m'_B$

$$\nu''_L - \nu''_R = m''_A - m''_B$$

- U' と U'' のエッジ状態数の関係:

$$m''_A = m'_{A,0} + m'_{B,\pi}$$

$$m''_B = m'_{B,0} + m'_{A,\pi}$$

$\Gamma \Psi = (-1)^g \Psi$	$\Psi : U'$ のエッジ状態
$\Gamma \Phi = (-1)^f \Phi$	$\Phi = G\Psi : U''$ のエッジ状態
$U'' \Phi = (-1)^{g+f} \Phi$	

$$m'_{A,0} - m'_{B,0} = (\nu'_L + \nu''_L)/2 - (\nu'_R + \nu''_R)/2$$

$$m'_{A,\pi} - m'_{B,\pi} = (\nu'_L - \nu''_L)/2 - (\nu'_R - \nu''_R)/2$$

トポロジカル数

$$(\nu_0, \nu_\pi) = \left(\frac{\nu' + \nu''}{2}, \frac{\nu' - \nu''}{2} \right)$$

$$\nu' = 0, \quad \nu'' = \begin{cases} 1 & (\theta > 0) \\ -1 & (\theta < 0) \end{cases} \quad \text{の場合}$$

$$(\nu_0, \nu_\pi) = \begin{cases} (+1/2, -1/2) & (\theta > 0) \\ (-1/2, +1/2) & (\theta < 0) \end{cases}$$

$$\theta > 0$$

$$\theta < 0$$

$\omega = 0, \pi$ にエッジ状態が1つずつ現れる

トポロジカル数 $N=2$ となる
1次元モデルを提案せよ。

*SSHモデル や 量子ウォークを拡張する or
全く別のモデルを元にしても良い。

*系の説明とトポロジカル数の計算をすること。

量子ウォーク: Asboth and HO, PRB **88** 12306(R) (2013)