大学院共通授業：オークションの理論と市場分析

担当者： 高木 真吾　　公共政策学連携研究部
質問等は，stakagi@econ.hokudai.ac.jp までお願いします．

June 22, 2012

プラン

- オークション・入札
  - 最適な入札戦略
  - 資源配分の帰結
- 分析上の着眼点
  - 入札参加者の財・サービスに対する評価の仕方
  - 入札者の同質性
- データ分析
  - 入札参加者の財評価法の検証
  - 入札者の異質性を考慮した入札制度のデータ分析
    - 例）電力の自由化は社会的に望ましい帰結をもたらすか？

入札／オークション

- 入札／オークション：
  - 少数の売り手と少数の買い手
  - それぞれの行動・戦略が価格を直接変化させる
- 近年の規制緩和・競争促進の流れの中で競争入札の重視
  - 携帯電話などの周波数に関する利用権
  - 国債の販売
  - 公共事業（どの程度の費用で工事を実施するのか）
  - 施設の払い下げ（公売・競売など，かんぽの宿，廃校後の学校施設など）
  - 規制市場への新規参入：電力調達（一定規模以上の電気を使うところは入札を実施可能）
- 世界貿易機関 (WTO) の「政府調達に関する協定」及び「政府調達に関する申し合せ」: 予定価格が 10 万 SDR（2007 年で 1,600 万円程度）以上の物を調達するとき，海外の企業も参加させる
- オークション：物・サービスを売る（調達する）仕組みについての考察
  - 収益性：どう売れば利益が大きくなるのか
  - 効率性：一番高い評価をする人に売れるか
- 市場化・自由化・効率化の流れの中で重要な位置
  - 入札者（買い手）に競争する場を提供し,「効率化」を目指す目的

この講義では

- オークションの売り手，買い手の戦略
  - 合理的な入札方法は（仕組み・入札者の選好（タイプ）に依存）
  - 高い収入を生む売り方は
- 競争の促進は「利益」を生むのか
  - 競争の促進＝参加者の増加として，競争促進の効果
  - 入札額は？ 売り手の利益は？
- オークション・入札データからわかること
  - 仕組み・入札者の選好（タイプ）を識別
  - 競争促進政策が社会的に望ましいものかどうか検証

まとめ

- 入札者間の財に関する評価が独立的であるとき，
  - 最適入札）第一位価格：(4) 式，第二位価格：(5) 式
  - 売り手の期待収入：

$$\text{第二位価格オークション} = \text{第一位価格オークション}$$

- 入札者間の財に関する評価が相互依存的であるとき，
  - 最適入札）第一位価格：(12) 式，第二位価格：(13) 式
  - 売り手の期待収入：

$$\text{第二位価格オークション} \geq \text{第一位価格オークション}$$

- 入札者間の財に関する評価が独立的であるとき，競争にメリットあり（収入増など）
- 入札者間の財に関する評価が相互依存的，入札者が同室ではないとき，
  - 競争の激化：同じ条件下で入札額が下がってしまうこともある
    - 競争の激化で財の評価を高くする → 実際勝った後で過大評価と後悔？(winner's curse：勝者にかけられる呪い)．
    - 「勝者にかけられる呪い」を避けるため，財の評価を引き上げず 消極的な入札
  - 競争激化も，売り手の収入は必ずしも増加しない

  ということが起きてしまう可能性
- 競争の効果が発揮される上で，入札者間における財評価の相互依存性の有無などは重要な要因

予備知識：順序統計量の分布

■ 独立で同一の分布 $F(x)$ に従う n 個確率変数：

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

■ これを大きい順に並べた替えたもの：

$$X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \ldots \geq X_{(n)}$$

■ 一位の確率変数 $X_{(1)}$ の分布関数（すべてがある点 x 以下となる確率）

$$\begin{aligned} F_{(1,n)}(x) &= \Pr[X_{(1)} \leq x] = \Pr[X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[X_i \leq x] \quad \{X_i\}_{i=1}^{n} \text{ の独立性} \\ &= \{F(x)\}^n \end{aligned}$$

◆ 一位の確率変数 $X_{(1)}$ の密度関数
$f_{(1,n)}(x) = (d/dx)\{F(x)\}^n = n \cdot \{F(x)\}^{n-1} \cdot f(x)$

■ 二位の確率変数 $X_{(2)}$ の分布関数 $X_{(2)} \leq x$ ：「全部 x 以下」＋「一個以外全部 x 以下」

$$F_{(2,n)}(x) = \{F(x)\}^n + {}_n\mathsf{C}_1 \cdot \{F(x)\}^{n-1} \times \{1 - F(x)\}$$

◆ 二位の確率変数 $X_{(2)}$ の密度関数

$$\begin{aligned} f_{(2,n)}(x) &= n(n-1)\{F(x)\}^{n-2}\{1 - F(x)\} \cdot f(x) \\ &= n\{1 - F(x)\} \cdot f_{(1,n-1)}(x) \end{aligned}$$

■ k 位の順序統計量 X_k の密度関数：

$$f_{(k,n)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\{F(x)\}^{n-k}\{1 - F(x)\}^{k-1} \cdot f(x)$$

◆ 区間 [0,1] の一様分布に従う確率変数について，$f(x) = 1$，$F(x) = x$ なので

$$f_{(k,n)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{n-k}(1-x)^{k-1} = \frac{x^{k-1}(1-x)^{n-k}}{B(n-k+1, k)} \quad x \in (0, 1)$$

すなわちベータ分布に従うことが分かり，$\mathbb{E}[X_{(k)}] = (n-k+1)/(n+1)$ となることが知られている.

■ $n-1$ 位（下から二番目）の順序統計量 X_{n-1} の密度関数：

$$f_{(n-1,n)}(x) = n(n-1) \cdot F(x) \cdot \{1 - F(x)\}^{n-2} \cdot f(x), \quad x \geq 0.$$

◆ パラメータ λ の指数分布に従う確率変数について，$f(x) = \lambda e^{-\lambda \cdot x}$，$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$ なので

$$f_{(n-1,n)}(x) = \lambda n(n-1) \cdot e^{-\lambda(n-1) \cdot x} \cdot \{1 - e^{-\lambda \cdot x}\}$$

◆ このとき，$n-1$ 位の順序統計量の期待値は，以下の積分として解析的に計算可能.

$$\mathbb{E}[X_{(n-1)}] = \int_0^\infty y f_{(n-1,n)}(y) dy$$

オークションの分類

- High Price Auction（高価格オークション）
  - 一つの商品について，複数の入札者のうち，最も高い値をつけた者が競り落とす
  - 例）美術品，稀少品など
- Low Price Auction（低価格オークション）
  - 一つの商品について，複数の入札者のうち，最も低い値をつけた者が競り落とす
  - 例）公共調達
- Oral Format（公開入札）
  - 値段を引き下げながら，最初に手を挙げた者が勝者：オランダ式
  - 値段を引き上げながら，最後まで脱落しなかった者が勝者：イギリス式
- Sealed-Bid Format（封印入札）
  - 最も高い値をつけた者が，自分の付けた価格で購入：第一位価格・封印入札方式
  - 最も高い値をつけた者が，自分の次に高値を付けた者の価格で購入：第二位価格・封印入札方式

参加者の価値評価

- 評価者それぞれが他者から影響を受けず商品の価値を評価：Independent Private Value
  - 例）無名画家の作品，ハイシーズン以外の航空旅券割引券（株主優待券）
- 商品の価値は全く同一ではないが，互いに正の相関がある：Affiliated Private Value
  - 例）著名な画家の美術品
- 商品は全員にとって同じ価値（事前にはわからない）：Common Value
  - 例）油田の採掘権（採掘技術は同じ）

戦略的同等性

- 商品の価値評価は他者からの影響なし（価値評価が独立的）
- 同じ商品を異なる形式のオークションで実施する
  - オランダ式と第一位価格・封印入札方式は類似性の高い入札結果
  - イギリス式と第二位価格・封印入札方式は類似性の高い入札結果
  - 入札価格そのものについては前者の方が低い
- なぜか？

上記オークションの帰結

- どのオークションで商品を売ったとしても，売り手にとっては期待収入は同一
  - この結果は，買い手間に若干の非対称性があっても成立する場合もある
  - 買い手が危険回避的なら不成立（第二位価格・封印入札方式よりも第一位価格・封印入札方式の方が大きい）
  - 価値評価が買い手間で関連しているときにも不成立

入札者の評価が互いに独立的である場合：**IPV**

この節の目的

- 第一位価格封印入札方式（第一位価格オークション）での最適入札関数
  - 参加者が増えるとともに積極的（同一条件では高い）入札
- 第二位価格封印入札方式（第二位価格オークション）での最適入札関数
  - 「正直が最善の策」：自分の評価額を入札
- 両オークションの収入同値性
  - 参加者の増加は売り手の期待収入の増加をもたらす

第二位価格封印入札方式（第二位価格オークション）のルール

- 最高値をつけた人が財の購入権を獲得
- 支払額は，第二位の入札額
- 評価の付け方は，入札者間で独立，
- 自分の評価額は分かっているが，他の人の評価額は分からない
- ただし，入札者全体として評価額がどう分布しているかは既知
  - V の分布：$\Pr[V < v] = F_V(v)$
  - V の値の範囲：$V \in [0, \bar{v}]$

設定

- 入札者は n 人，突出した行動をとる者はいない（入札者の対称性）
- 一般性を失うことなく，第一番目の入札者（1 さん）について考える
- 1 さんの評価額を v_1，入札額を b_1
- 1 さんの利益：

$$\Pi_1 = \begin{cases} v_1 - \max_{2\le j\le n} b_j & \text{if} \quad b_1 > \max_{2\le j\le n} b_j \\ 0 & \text{if} \quad b_1 < \max_{2\le j\le n} b_j \end{cases}$$

IPV: 第二位価格オークションでの最適入札関数

- すべての入札者が対称であるなら，次の入札関数がほかの入札方法に比べて利益が高い．

$$\beta_{II}(v) = v \tag{1}$$

つまり，自分の評価額をそのまま表明することである．

- その理由は
  - 自分の評価額より高くて勝っても，第二位の額が自分の評価額より上なら損する可能性
  - 自分の評価額より低くしたとき，その額と自分の評価額の間に入札されるとあったはずの収入が 0．
  - これらより，評価額以上でも以下でも評価額そのものを入札した場合よりも収入が上になることがない
- $\beta_i \equiv \max_{j \neq i} b_j$ として，
  1. $v_i > \beta_i$ のとき，v_i で入札すれば i の勝ち：利益は $v_i - \beta_i$
     - $v_i > z_i > \beta_i$ なる z_i で入札：i は勝つが，利益は $v_i - \beta_i$
     - $v_i > \beta_i > z_i$ なる z_i で入札：i は負け，利益は 0
  2. $\beta_i > v_i$ のとき，v_i で入札すれば i の負け，利益 0
     - $\beta_i > v_i > z_i$ なる z_i で入札：i の負け，利益 0

  以上，どのケースでも $\beta_{II}(v) = v$ から引き下げることで利益を上昇させられない．
- 同様に $\beta_{II}(v) = v$ から引き上げることでも利益を上昇させられない

IPV: 勝利確率

- 1 さんが勝つ確率（1 の評価額が v であり，他はこれ以下となる確率）

$$\begin{aligned} G_{n-1}(v) &= \Pr[V_2 \leq v, V_3 \leq v, \ldots, V_n \leq v] \\ &= \prod_{j=2}^{n} \Pr[V_j \leq v] = \{F_V(v)\}^{n-1} \end{aligned}$$

- n 人のうち，1 さん以外の $n-1$ 人で一番大きな評価額

$$Y_{(1,n-1)} \equiv \max_{2 \leq j \leq n} V_j$$

- つまり，$Y_{(1,n-1)}$ の分布関数は，$G_{n-1}(v) = \Pr[Y_{(1,n-1)} \leq v]$ となる

IPV: 第二位価格オークションでの買い手の期待支払額，売り手の期待収入

- 期待支払額：支払額 × 勝つ確率

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ExPay}_{II}(v) &= （v\ \text{以下の条件付き）第二位評価額の期待値} \\
&\quad \times v\ \text{で勝てる確率} \\
&= \mathbb{E}[\,Y_{(1,n-1)}\,|\,Y_{(1,n-1)} < v\,] \times G_{n-1}(v) \\
&= \int_0^v y\,\frac{g_{n-1}(y)}{G_{n-1}(v)}dy \times G_{n-1}(v) \\
&= \int_0^v y\,g_{n-1}(y)dy
\end{aligned}
$$

- 売り手の期待収入＝全員分の期待支払額の総計 $V_i \sim F_V(\bullet)$, $V_i \in [0, \bar{v}]$

$$
\begin{aligned}
n \cdot \mathbb{E}[\mathsf{ExPay}_{II}(V)] &= n \cdot \int_0^{\bar{v}} \left\{ \int_0^v y\,g_{n-1}(y)dy \right\} f_V(v)dv \\
&= n \cdot \int_0^{\bar{v}} y \cdot \left\{ \int_y^{\bar{v}} f_V(v)dv \right\} g_{n-1}(y)dy \\
&= \int_0^{\bar{v}} y \cdot \underline{\{n \cdot \{1 - F_V(y)\}\,g_{n-1}(y)\}}dy \\
&= \mathbb{E}[V_{(2,n)}]
\end{aligned}
$$

下線部は，n 個の独立な $\{V_i\}_{i=1}^n$ のうち，上から二番目の順序統計量 $V_{(2,n)}$ の密度関数．

- 売り手の期待収入＝ <u>n 人中，二番目の評価額 $V_{(2,n)}$ の期待値</u>
- 売り手の期待収入は n に関して増加的
  - ◆ n 人中２番目に大きい値の平均値なので，n について増加的であることはほぼ自明

第一位価格封印入札方式（第一位価格オークション）のルール

- 最高値を受けた人が財の購入権を獲得
- 支払額は，自分の入札額
- 評価の大きさは，入札者間で独立，
- 自分の評価額は分かっているが，他の人の評価額は分からない
- ただし，入札者全体として評価額がどう分布しているかは既知
  - ◆ V の分布：$\Pr[V < v] = F_V(v)$
  - ◆ V の値の範囲：$V \in [0, \bar{v}]$

設定

- i さんの評価額を v_i，入札額を b_i
- 1 さんの利益：

$$\Pi_1 = \begin{cases} v_1 - b_1 & \text{if} \quad b_1 > \max_{2\le j\le n} b_j \\ 0 & \text{if} \quad b_1 < \max_{2\le j\le n} b_j \end{cases}$$

- 評価額 v の下での入札戦略を $\beta(v)$ とし，
  - 対称（すべての入札者間で同じ）
  - $\beta(v)$ は微分可能
  - $\beta(v)$ は増加的

  であるという性質をもつとき，

$$\max_{2\le j\le n} \beta(V_j) = \beta(\max_{2\le j\le n} V_j) = \beta(Y_{(1,n-1)})$$

  となる

IPV: 第一位価格オークションでの最適入札関数

- v という評価を持つ入札者 1 が b という金額を入札したときの期待利益は以下の通り

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Pi_1(v)] &= (v-b)\times \Pr[\beta(Y_{(1,n-1)}) < b] \\ &= (v-b)\times \Pr[Y_{(1,n-1)} < \beta^{-1}(b)] \\ &= (v-b)\times G_{n-1}(\,\beta^{-1}(b)\,) \end{aligned}$$

  ただし，$\beta^{-1}(b)$ は $b=\beta(v)$ の逆関数.
- 一次条件（$g_{n-1}(v) = G'_{n-1}(v)$）

$$\frac{g_{n-1}(\,\beta^{-1}(b)\,)}{\beta'(\,\beta^{-1}(b)\,)}(v-b) - G_{n-1}(\,\beta^{-1}(b)\,) = 0$$

- 対称性から $b=\beta(v)$ を代入し，整理すると，

$$G_{n-1}(v)\cdot \frac{d\beta(v)}{dv} + g_{n-1}(v)\cdot\beta(v) = v\cdot g_{n-1}(v)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dv}\{G_{n-1}(v)\cdot\beta(v)\} = v\cdot g_{n-1}(v)$$

- 評価額が０のときは，入札額も０になると考えて，$\beta(0)=0$
- このとき上の微分方程式は次のような解を持つ.

$$\beta(v) = \frac{1}{G_{n-1}(v)}\int_0^v y\cdot g_{n-1}(y)dy = E[Y_{(1,n-1)}\,|\,Y_{(1,n-1)} < v]. \qquad (2)$$

IPV: 第一位価格オークションにおける買い手の期待支払額，売り手の期待収入

- i さんの期待支払額（「v が一番高い評価額である」＝「i 番目の入札者が v の入札で勝つ確率」）

$$\begin{aligned}\text{ExPay}_I(v) &= v\text{ が一番高い評価額であるときの入札額}\\ &\quad \times v\text{ が一番高い評価額である確率}\\ &= \mathbb{E}[\,Y_{(1,n-1)}\,|\,Y_{(1,n-1)} < v\,] \times G_{n-1}(v), \quad (Y_{(1,n-1)} \equiv \max_{2\le j\le n} V_j)\end{aligned}$$

明らかに同じ $\text{ExPay}_I(v) = \text{ExPay}_{II}(v)$ となって，どちらも同じ期待払い額.

- 売り手にとっての期待収入（第二位評価額の期待値）

$$n \cdot \mathbb{E}[\text{ExPay}_I(V)] = \mathbb{E}[V_{(2,n)}] \tag{3}$$

- つまり，$\mathbb{E}$[大きさ n の標本で二番目に小さいものの順序統計量]

最適入札関数の性質

- 両オークションの最適入札関数.

$$\beta_I(v) = v - \frac{1}{G_{n-1}(v)}\int_0^v G_{n-1}(y)dy \tag{4}$$

$$\beta_{II}(v) = v \tag{5}$$

- 評価額が v であるとき，入札額 $\beta_I(v)$ は

$$\int_0^v \left\{\frac{G_{n-1}(y)}{G_{n-1}(v)}\right\} dy$$

の分だけ評価額 v から減額（shading という）.

  - 第一価格で評価額そのままの入札：利益 0
  - 評価額から大きく減額しての入札：勝つ確率が低下

- $\beta_I(v)$ は n に関して増加的

$$\frac{G_{n-1}(y)}{G_{n-1}(v)} = \left(\frac{F_V(y)}{F_V(v)}\right)^{n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad y < v$$

- 二つのオークションの関係：参加者が十分多いときには同入札額

$$\beta_I(v) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta_{II}(v)$$

  - 第一位価格：入札者数 n の増加と共に，同評価を持つ人の入札額が増加
  - 第二位価格：入札者数 n の増加と共に，同評価を持つ人の入札額は変化なし

- 効率性：どちらも最高の評価を与えた人に販売
- 売り手の期待収入：n に関して増加的
  - 競争促進によって期待売り上げの向上が見込まれる

例１：評価額がベータ分布に従う時の最適入札

■ 評価額がベータ分布（α, β）に従う状況を考えてみる．つまり

$$f_V(v) = \frac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}, \quad F_V(v) = \int_0^v f_V(y)dy, \quad G_n(v) = \{1 - F_V(v)\}^{n-1}, \quad 0 \le v \le 1$$

◆ 低評価額が多い／中程度が多い／高評価者が多い（図 1中段）

■ 第一位価格オークションにおける均衡入札関数は

$$\beta_I(v) = v - \frac{1}{G_{n-1}(v)} \int_0^v G_{n-1}(y)dy$$

◆ 高評価の人が多（図 1左パネル）：自分が高い評価でも油断できない

◆ 高評価の人が少（図 1右パネル）：自分が高い評価なら割引可能

◆ どのケースでも参加者が増えるとよりアグレッシブな入札

■ 第二位価格オークションにおける均衡入札関数は

$$\beta_{II}(v) = v \tag{6}$$

■ 売り手の期待収入（入札参加者数 n に関して増加的）

$$\begin{aligned} n \cdot \mathbb{E}[\mathrm{ExPay}_I(V)] &= n \cdot \mathbb{E}[\mathrm{ExPay}_{II}(V)] = \mathbb{E}[V_{(2,n)}] \\ &= \int_0^1 y \cdot n(n-1) f_V(y) \cdot \{1 - F_V(y)\} \cdot \{F_V(y)\}^{n-2} dy \end{aligned}$$

◆ 参加人数の増加によって，売り手の期待収入は増加していく

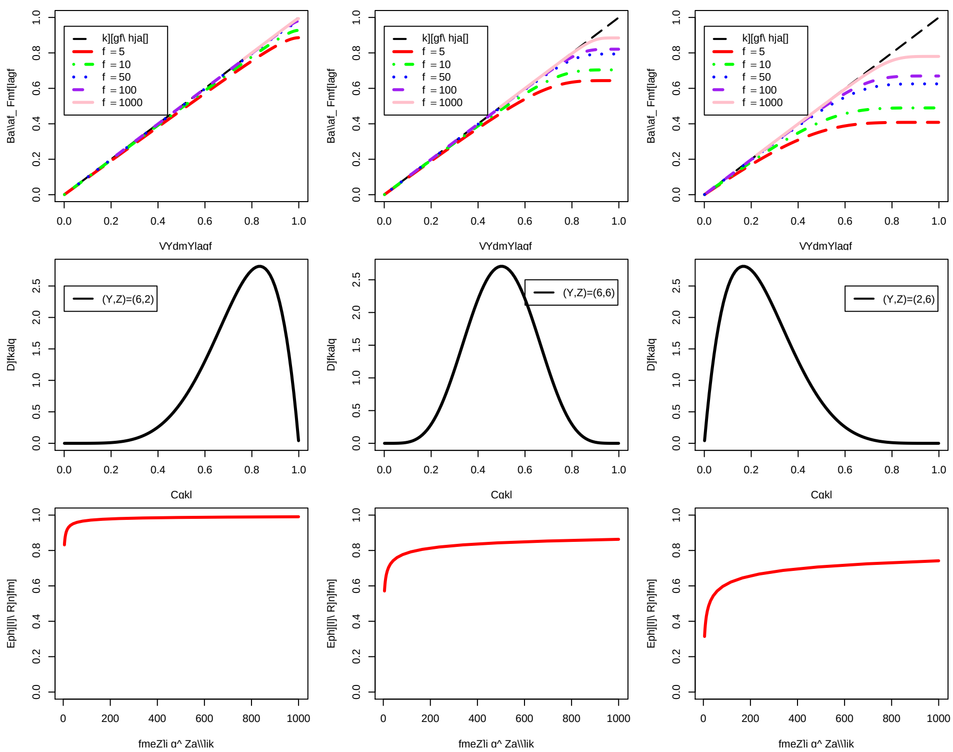


Figure 1: High-Price Auction: Valuation = Beta Distribution

練習問題（空欄を計算してください）

- High-Price Auction: 財への評価額が一様分布に従う時の最適入札
  - 評価額が区間 $(0,1)$ の一様分布に従う状況を考えてみる．つまり

$$f_V(v) = \begin{cases} 1 & 0 < v < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \; F_V(v) = \begin{cases} 0 & v \le 0 \\ v & 0 < v < 1 \\ 1 & v \ge 1 \end{cases}, \; G_{n-1}(v) = \{F_V(v)\}^{n-1}$$

  - 第一位価格オークションにおける均衡入札関数は，式 (4) より

$$\beta_I(v) = v - \frac{1}{G_{n-1}(v)} \int_0^v G_{n-1}(y)dy = \boxed{} \tag{7}$$

  - 第二位価格オークションにおける均衡入札関数は

$$\beta_{II}(v) = v \tag{8}$$

  - 売り手の期待収入（n に関して増加的）[a]

$$n \cdot \mathbb{E}[\text{ExPay}_I(V)] = n \cdot \mathbb{E}[\text{ExPay}_{II}(V)] = E[V_{(2,n)}] = \boxed{}$$

- Low-Price Auction: サービス提供費用額が指数分布に従う時の最適入札
  - 入札者の費用水準がパラメータ λ の指数分布に従う状況を考える．つまり

$$f_C(c) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \cdot c} & c \ge 0 \\ 0 & c < 0 \end{cases}, \; F_C(c) = 1 - e^{-\lambda \cdot c}, \; \mathsf{G}_{n-1}(v) = e^{-\lambda(n-1)\cdot c}, c \ge 0.$$

  - 第一位価格オークションにおける均衡入札関数は，式 (11) より

$$\beta_I(c) = c + \frac{1}{\mathsf{G}_{n-1}(c)} \int_c^\infty \mathsf{G}_{n-1}(y)dy = \boxed{} \tag{9}$$

  - 売り手の期待受け取り額（n に関して減少的; $C_{(n-1,n)}$ は大きさ n の標本で $n-1$ 番目の大きさ）[b]

$$n \cdot \mathbb{E}[\text{ExRev}_I(C)] = \mathbb{E}[C_{(n-1,n)}] = \boxed{}$$

[a] 予備知識の頁より $V_{(2,n)}$ はパラメータ $(n-2+1, 2)$ のベータ分布に従う．その期待値を計算すればよい．

[b] 予備知識の頁より，$C_{(n-1,n)}$ の密度関数は，大きさ n の標本における大きい方から $n-1$ 位の順序統計量について考え，その密度関数をもとに期待値を計算すればよい

IPV: 第一位価格オークションでの最適入札関数

- Low− Price オークションを考える（公共事業などへ適用）
- $c \in (0, \bar{c})$ という費用を持つ入札者 1 が b という金額を入札するときの期待利益（$Y_{(n-1,n-1)}$ は $n-1$ 人の費用のうち，最小となる順序統計量）:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Pi_1(c)] &= (b-c) \times \Pr[\beta(Y_{(n-1,n-1)}) > b] \\ &= (b-c) \times \Pr[Y_{(n-1,n-1)} > \beta^{-1}(b)] \\ &= (b-c) \times \mathsf{G}_{n-1}(\,\beta^{-1}(b)\,)\end{aligned}$$

ただし，$\beta^{-1}(b)$ は $b = \beta(c)$ の逆関数であり，$\mathsf{G}_{n-1}(\,x\,)$ は他の $n-1$ 人の費用が x を上回る確率なので

$$\mathsf{G}_{n-1}(\,x\,) = \{\,1 - F_C(x)\,\}^{n-1}$$

- 一次条件（$\mathsf{g}_{n-1}(c) = \mathsf{G}'_{n-1}(c)$）

$$\frac{\mathsf{g}_{n-1}(\,\beta^{-1}(b)\,)}{\beta'(\,\beta^{-1}(b)\,)}(b-c) + \mathsf{G}_{n-1}(\,\beta^{-1}(b)\,) = 0$$

- 対称性から $b = \beta(c)$ を代入し，整理すると，

$$\frac{d}{dv}\{\mathsf{G}_{n-1}(\,c\,) \cdot \beta(c)\} = c \cdot \mathsf{g}_{n-1}(c)$$

- 費用の上限 $\bar{c}$ のときは，入札額も $\bar{c}$ になると考えて，$\beta(\bar{c}) = \bar{c}$
- このとき上の微分方程式は次のような解を持つ．

$$\beta(c) = \frac{1}{\mathsf{G}_{n-1}(c)} \int_c^{\bar{c}} y \cdot \mathsf{g}_{n-1}(y) dy = E[Y_{(n-1,n-1)} \,|\, Y_{(n-1,n-1)} > c] \tag{10}$$

$$= c + \frac{1}{\mathsf{G}_{(n-1,n-1)}(c)} \int_c^{\bar{c}} \mathsf{G}_{n-1}(y) dy. \tag{11}$$

- 期待支払い額

$$\mathbb{E}[\text{大きさ } n \text{ の標本で二番目に小さいものの順序統計量}]$$

例２：公共事業などサービス提供に関する入札

- サービスの買い手が，サービス提供を入札によって呼び掛ける（最安値を提示した人に権利賦与）
- サービスの売り手は，期待利益を最大にするようにサービス提供料金を考え入札を行う.
- サービスの売り手間で費用分布 $F_C(c)$ が独立で同一と想定.
- 自分の費用水準が c の人の最適入札額は以下の通り

$$
\begin{aligned}
\beta(c) &= c + \frac{1}{G_{n-1}(c)} \int_c^{\infty} G_{n-1}(y)dy \\
&= c + \frac{1}{\{1 - F_C(c)\}^{n-1}} \int_c^{\infty} \{1 - F_C(y)\}^{n-1} dy
\end{aligned}
$$

- 費用分布 $F_C(c)$：ベータ分布に従う状況を考えてみる（図 2中段）
  - ◆ 低費用で実行可能可能業者が少ない（図 2中段左）
  - ◆ 低費用で実行可能可能業者が多い（図 2中段右）
  - ◆ 参加者の増加によって，より儲けの少ない（費用ぎりぎり）攻撃的入札を行う傾向
- 買い手（調達側）にとっての平均支出額：入札参加者の増加によって減少
  - ◆ つまり，公共事業等などを考えると調達費用がより少なくて済む

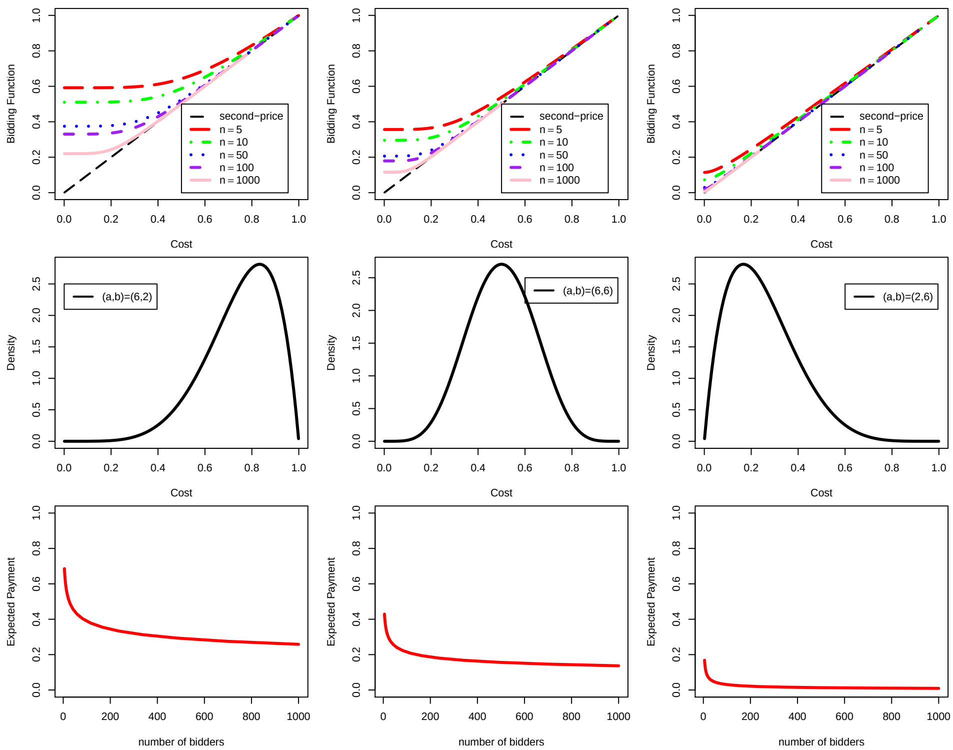


Figure 2: Low-Price Auction: Cost = Beta Distribution

この節の目的

- 第一位価格オークションの最適入札関数
- 第二位価格オークションの最適入札関数
- 第二位価格オークションからの方が収入が平均的に高い
- まとめ

結論

- 入札者間の評価に相互依存性があるとき，
  - 最適入札関数：
    - 第一位価格封印入札オークション:

$$\beta_I(x) = \int_0^x v(y,y;n)dL_{n-1}(y|x), \quad L_{n-1}(y|x) = \exp\left\{-\int_y^x \frac{g_{n-1}(t|t)}{G_{n-1}(t|t)}dt\right\} \tag{12}$$

      - $G_{n-1}(y|x) = \Pr[Y_{(1,n-1)} \leq y \,|\, X_1 = x]$（自分が x と評価するとき，自分以外の最高評価値の分布関数）
    - 第二位価格封印入札オークション:

$$\beta_{II}(x) = v(x,x;n) \tag{13}$$

$$v(x,y;n) = \mathbb{E}[\,V_1 \,|\, X_1 = x, Y_{(1,n-1)} = y\,]$$

-
  - 売り手の期待収入：第二位価格オークション $\geq$ 第一位価格オークション
  - 証明は省略するが[a]，一定の条件を課さないと
    - 競争が激しくなったとしても，同じ情報のもとで入札額が下がってしまう（消極的な入札）
    - 競争が激しくなったとしても，売り手の収入が必ずしも増加しない

  ということが起きてしまう
- 競争の効果が発揮される上で，入札者間における財評価の相互依存性の有無は重要な要因

[a]例えば，Pinkse and Tan (2005) "The Affiliation Effect in First-Price Auctions", Econometrica 73, pp. 263-277.

相互依存性（Affiliation）

- 入札者 i は自分自身の財評価に関わる情報 X_i を持つ
- n 人の入札者それぞれが持つ，財に関する情報:

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

- 相互依存性 (Affiliation) ＝ある人が高評価する情報を持つとき，他の人も高評価（multivariate total positivity ）
  - 各人の情報は独立ではないので同時分布を考える必要がある.
- 相互依存性を持つ n この確率変数 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ について，
  - 性質：増加関数 $\kappa(\bullet)$ について，$x > x'$ であるとき，

$$\mathbb{E}[\,\kappa(Y_{(1,n-1)})\,|\,X_1 = x'] \geq \mathbb{E}[\,\kappa(Y_{(1,n-1)})\,|\,X_1 = x],\;\; Y_{(1,n-1)} = \max_{2\leq j\leq n} X_j$$

- 記号の準備
  - $Y_{(1,n-1)} = \max_{2\leq j\leq n} X_j$（自分以外の最高評価値）
  - $G_{n-1}(y|x) = \Pr[Y_{(1,n-1)} \leq y\,|\,X_1 = x]$（自分が x と評価するとき，自分以外の最高評価値の分布関数）
- 入札者 1 の財に関する評価額（入札者 1 の選好）:

$$V_1 \equiv v_1(\mathbf{X}) = v(X_1, \mathbf{X}_{(-1)})$$

  ただし自分以外の情報 $\mathbf{X}_{(-1)}$ は見えない
- 入札者 1 の財に関する評価額（入札者 1 の選好）:

$$V_1 \equiv v_1(\mathbf{X}) = v(X_1, \mathbf{X}_{(-1)})$$ ただし自分以外の情報 $\mathbf{X}_{(-1)}$ は見えない

- 自分が x，自分以外の最高評価が y であるときの財の期待評価額：

$$v(x, y; n) = \mathbb{E}[\,V_1\,|\,X_1 = x, Y_{(1,n-1)} = y\,] \tag{14}$$

- 各人の評価が独立であるとき（IPV），上の設定は

$$V_1 \equiv v_1(\mathbf{X}) = v(X_1)$$

  また

$$v(x, y; n) = \mathbb{E}[V_1|X_1 = x, Y_{(1,n-1)} = y] \equiv v(x) \tag{15}$$

  となって，入札者数 n の影響を受けない

IPV と APV の区別についてのアイデア (FPSB)

- 第一位価格オークション：財の評価
  - IPV：入札者数が変わっても変化なし：(15) 式
  - APV：入札者数が変わると変化：(14) 式
  - 実施方法：以下の関係式（スライドボックス 22 参照）から財の評価を推定

$$\beta'(v) = \{v - \beta(v)\} \cdot \frac{g_{n-1}(v)}{G_{n-1}(v)} \quad \Leftrightarrow \quad v = \beta(v) + \frac{\beta'(v) \cdot G_{n-1}(v)}{g_{n-1}(v)}$$

$b_i = \beta(x_i) \to x_i = \beta^{-1}(b_i)$ を用いて

$$v_i = b_i + \frac{G_{n-1}(\ \beta^{-1}(b_i)\ )}{g_{n-1}(\ \beta^{-1}(b_i)\ )} = b_i + \frac{\tilde{G}(\ b_i\ )}{\tilde{g}(\ b_i\ )}$$

オークションを入札者数ごと分割し，それぞれの場合の財評価推定値の分布をノンパラメトリックに推定し，それぞれが異なっているなら APV と判断できる．

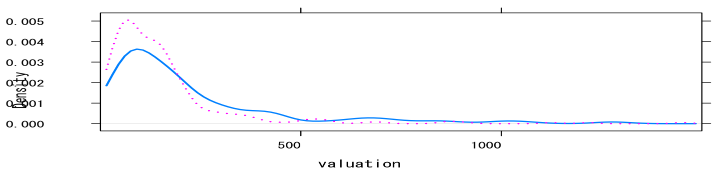
例４：データによる IPV paradigm と APV paradigm の区別

- 森林区画の販売（材木を伐採する権利）
  - 国民共有の資源なのでなるべく多くの収益を得たい
  - オークションの実施
  - 多くの入札では少数の入札者のみ応札してきた．
  - 入札者数２，入札者数３の場合で評価価値額を推定．

$$v_i = b_i + \frac{\tilde{G}(\ b_i\ )}{\tilde{g}(\ b_i\ )}$$

  - $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ の分布をそれぞれのケースで推定し，比較
  - それぞれのケースで分布が異なっているなら，APV，同じなら IPV の可能性
    - Kolmogorov-Smirnov 検定には，分布が同一であることを棄却．

Figure 3: 木材伐採権オークション：入札者数２（赤破線）/入札者数３（青実線）



IPV と APV の区別についてのアイデア (SPSB)

- 第二位価格オークション：入札価格
  - IPV：入札者数が変わっても変化なし（例えば (5) 式を参照）
  - APV：入札者数が変わると変化（例えば (13) 式を参照）
- 実施方法：入札価格の分布を入札者数ごとに推定し，それぞれが異なっているなら APV.

例５：実証分析：航空旅券割引券（株主優待券）オークション

- 航空旅券割引券（株主優待券）
  - 基本的には料金を半額にする機能を持つ
  - 購入に際しては正規料金と同じ扱いなので変更等の自由度が高い
    - 各種割引券は払い戻し・変更等の面で不都合が生じる場合もある
    - マイレージも正規料金分
  - 割引が設定されない期間も株主優待券は利用可能なことが多い
  - Yahoo オークションで JAL，ANA の株主優待券が販売
  - 入札者ごとに目的地，利用法などで異なっているため，IPV の可能性
    - GW 期には APV の傾向がある（利用期限が迫っている）.

Yahoo! オークション

- 出品者
  - 開始価格・出品期間・即決価格（再交渉の余地あり）
- 入札者
  - 最低入札単位：5000 円まで 100 円刻み，以後 250 円
  - 各自が希望入札額を入れる
  - 他者の希望額は見えない
  - 同じ価格が入札：早い方が有効
- 入札者にとっては第二価格オークションに近いが，入札するタイミングに自由度がある

分析結果

- 入札額のうち最高値は，評価額そのものではなく，打ち切られた値であることに注意.
- 分布全体をみる.
  - 参加者が多くなると，非常に低い値の入札者が一定層いる
- 平均や分位点についてみる．オークション ℓ における i さんの入札額 $p_{i,\ell}$，その時の参加人数 n_ℓ
  - 方法：以下の係数 β_1 の有意性検定

$$\mathbb{E}[p_{i,\ell}|n_\ell] = \beta_0 + \beta_1 n_\ell \quad \text{回帰分析}$$
$$\rho_\tau(p_{i,\ell}|n_\ell) = \beta_{0,\tau} + \beta_{1,\tau} n_\ell \quad \text{分位点回帰}$$

  ただし $\rho_\tau(p|n)$ は n が与えられたときの p の 100τ %分位点を意味する.
- 分布全体あるいは平均的な傾向をみると参加者数によって入札価格分布に変化あり
- ただし，比較的高位の分位点に注目するとその影響は小さい：IPV の可能性あり
  - 多くが参加する入札には，非常に低価格入札が見られる（あわよくば，という入札か？）

入札者数ごとの入札価格

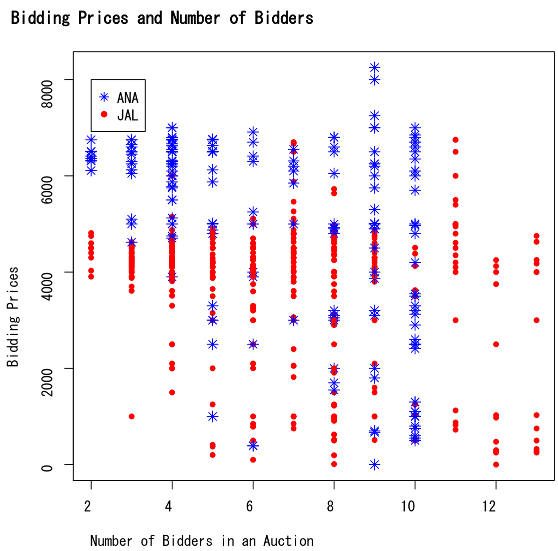


Figure 4: 入札者数ごとの入札価格

参加人数別入札分布関数：**JAL**

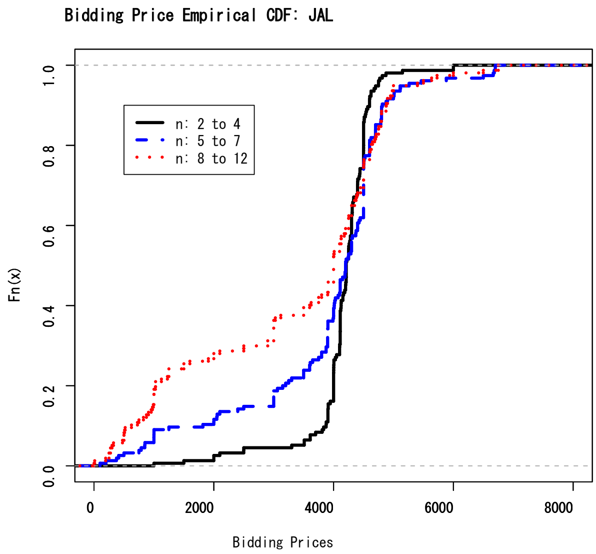


Figure 5: 参加人数別入札分布関数：JAL

参加人数別入札分布関数：**ANA**

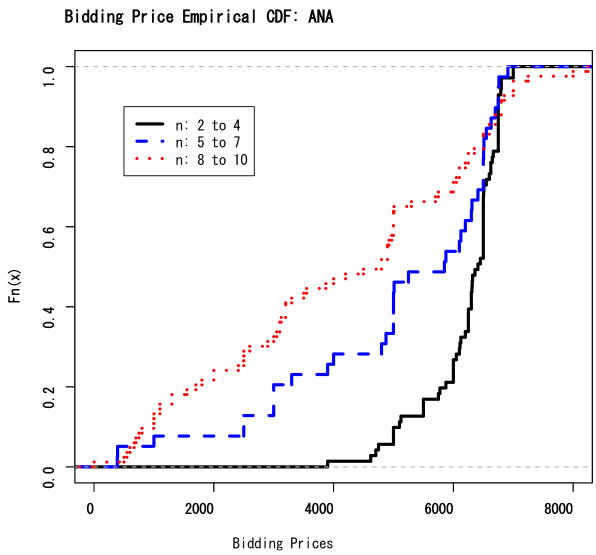


Figure 6: 参加人数別入札分布関数：ANA

入札者数ごとのパーセント点／平均の推移：**JAL**

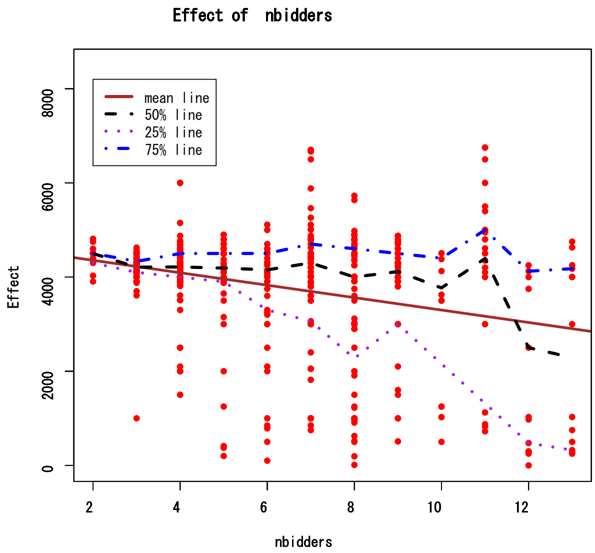


Figure 7: 入札者数ごとのパーセント点／平均の推移：JAL

分位点回帰における入札者数の係数：**JAL**

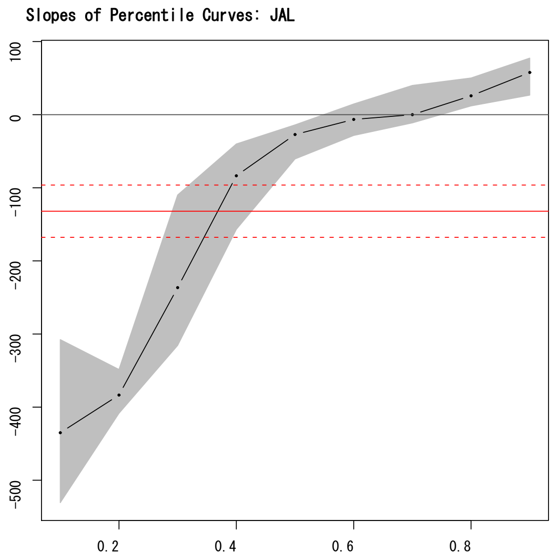


Figure 8: 分位点回帰における入札者数の係数：JAL

入札者数ごとのパーセント点／平均の推移：**ANA**

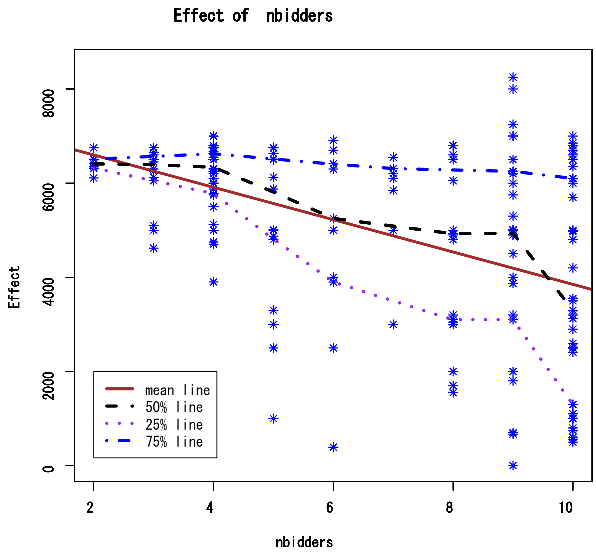


Figure 9: 入札者数ごとのパーセント点／平均の推移：ANA

分位点回帰における入札者数の係数：**ANA**

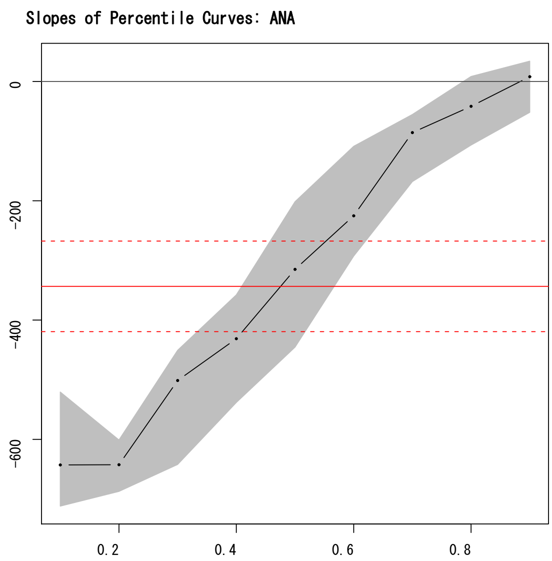


Figure 10: 分位点回帰における入札者数の係数：ANA

オークションモデルの構造推定

- 入札参加者の選好などを，入札結果から直接推定
- 推定された入札参加者の選好を用いてモデルを解く
- 仮想的な政策実験（PPS への優遇政策）も実行可能
- 応用例：電力の小売り市場
  - 2004 年から大口需要家は直接電力会社以外から電力購入可能
  - 入札者：地域の電力会社と特定規模電気事業者 (PPS)
  - 自由化で社会的厚生は高まるのか
  - より社会的厚生を高める手段はあるのか
- 入札モデル
  - 入札者間の非対称性
    - 電力会社：以前の購入実績・設備内容などから費用構造が共有知識
    - PPS：電力の調達計画など不明な点も多く，費用構造は私的情報
  - PPS の入札参加に関する内生的意思決定
    - PPS：期待利潤が正でない限り入札に参加しない
    - PPS が実際に何社入札に参加するかは不明
  - 以上の条件の下でモデルを設定し，電力会社・PPS それぞれの発電費用分布を推定
  - 得られた結果からモデルを解いて，政策シミュレーションを実行可能
    - 参入を促すための PPS への優遇政策 (ex. 托送料の割引) など.
    - 社会的に望ましい政策の実施可能性

分析結果：消費者負担・社会的負担

- 潜在的入札者 n の増加 $\rightarrow$ 費用低下＝消費者負担の低下
- 優遇率上昇の効果：電力会社
  - 相手を優遇するので積極的な入札を促される
- 優遇率上昇の効果：PPS(参入者)
  - 同一費用なら優遇効果で入札額引き上げ
  - 既存業者の積極性効果から実際に応札する PPS の費用水準は低くなっている可能性
  - そのため，一様に上昇し続けるとは限らない
  - ただし，一定以上の優遇は，新規参入者間の競合だけを生み，入札額を微増させる
- 優遇率上昇の効果：δ が小さいとき，
  - 一定割合あった，参入者の落札分が割高になり，落札額も微増
  - このとき，積極性効果はあまり働かない様子
- δ が中程度
  - 電力会社への積極性効果により応札する新規参入者の費用水準は低下
  - これが優遇効果よりも大きいためか，平均落札金額は低下
- δ が大きい
  - PPS 間でのみ競合
  - 優遇効果の分だけ，落札額は上昇

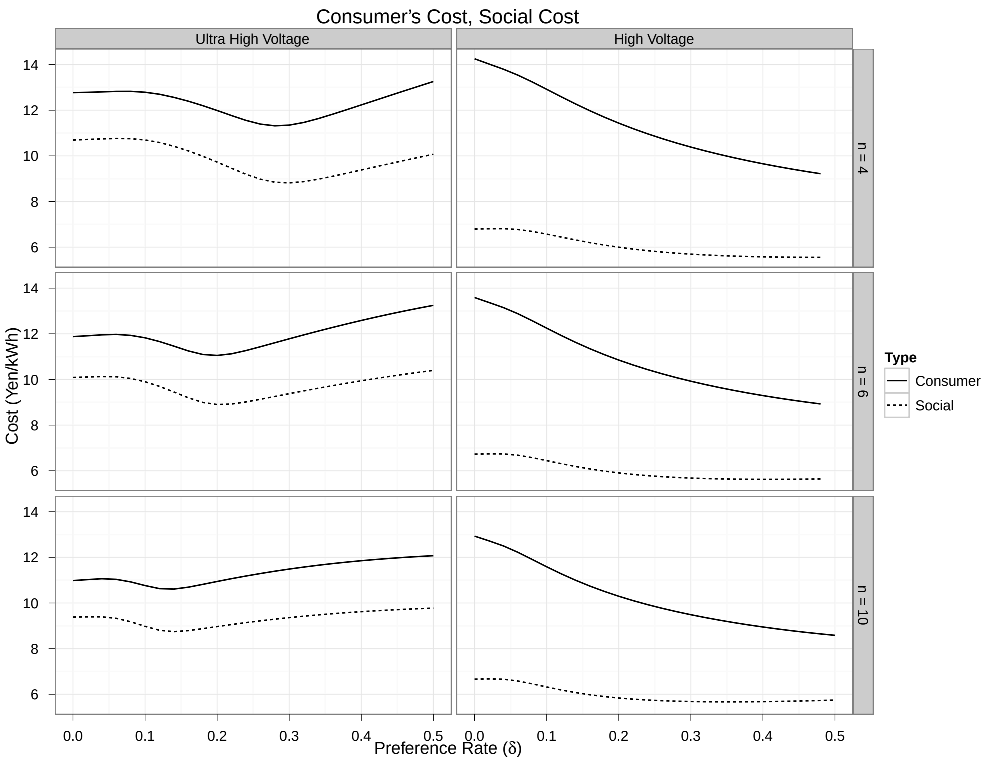


Figure 11: 消費者費用と社会的費用

分析結果：効率的資源配分

- p_{B-} は，PPS の消極性による非効率発生確率
  - 既存業者が非常に低い入札を行うケース：小さい確率
- p_{B+} は，電力会社の消極性による非効率発生確率
  - 優遇率の高まりとともに PPS が有利
  - 優遇率が十分高い → 既存業者は競合不可，この確率は再下落
- p_A は，優遇によって参入者間で競合するが，実は既存業者の方が低費用となる確率
  - 優遇率が高まると上昇していく

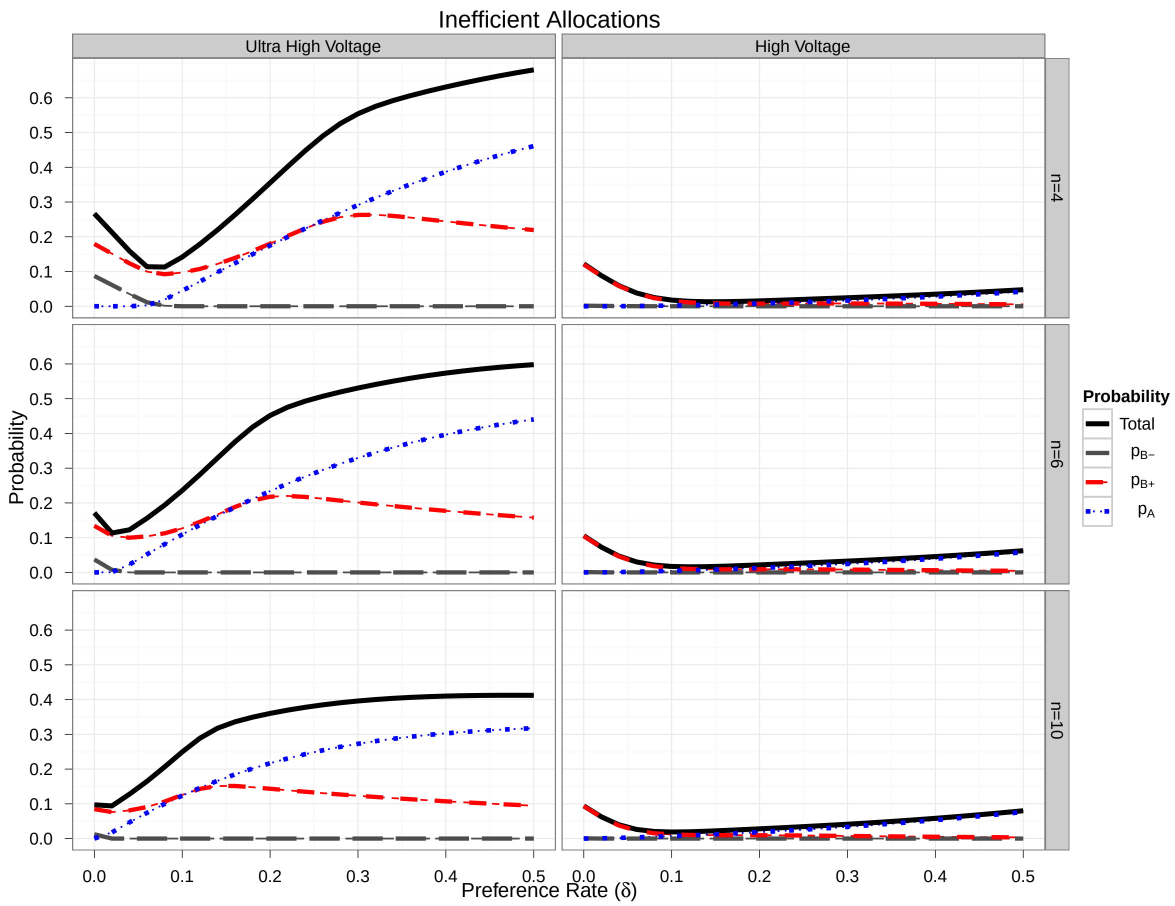


Figure 12: 非効率的資源配分の発生確率