

2010年4月23日

# トポロジー工学のすすめ

北海道大学・工・応用物理学専攻  
トポロジー工学教育研究センター

丹田 聡

## トポロジーとは

連続変形により不変かつ離散的な性質を抽出

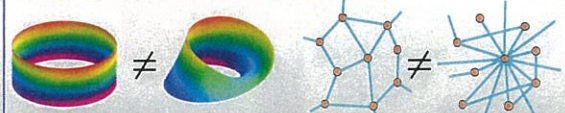
コーヒーカップ

ドーナツ

連続変形



つながり方に着目した形の分類とその性質



通常のリング    メビウス・リング    ネットワーク・トポロジー

## トポロジーを切り口に



## トポロジー工学のコンセプト

要素還元科学と普遍数理科学

トポロジカル物質基礎・物質応用

トポロジカル相転移

トポロジカル量子効果・量子現象

Aharonov-Bohm効果

Aharonov-Casher効果

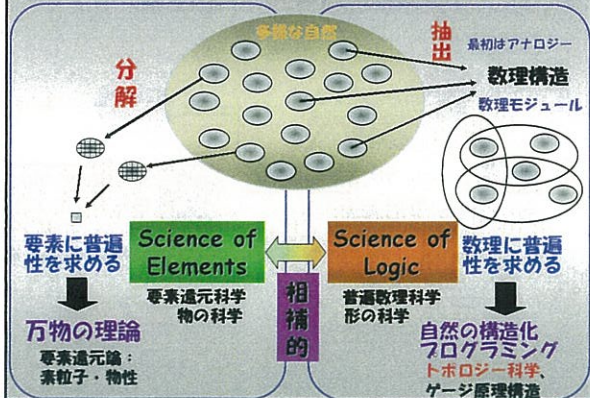
Berry位相

トポロジカル・デザイン

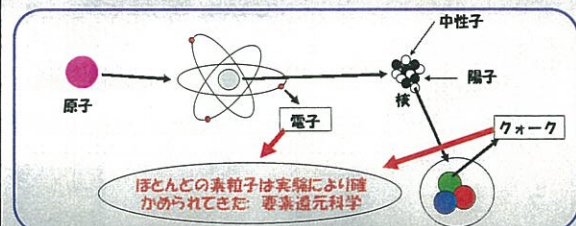
エネルギー・エントロピーの流れ

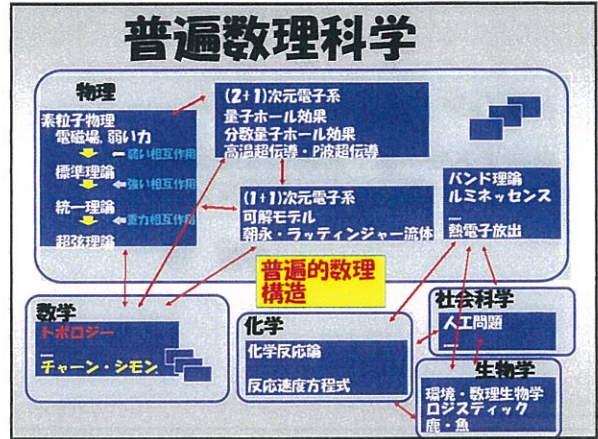
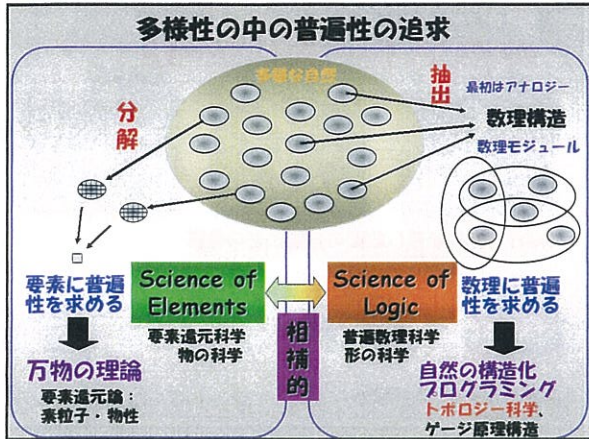
ネットワークデザイン 囲碁の一手

## 多様性の中の普遍性の追求



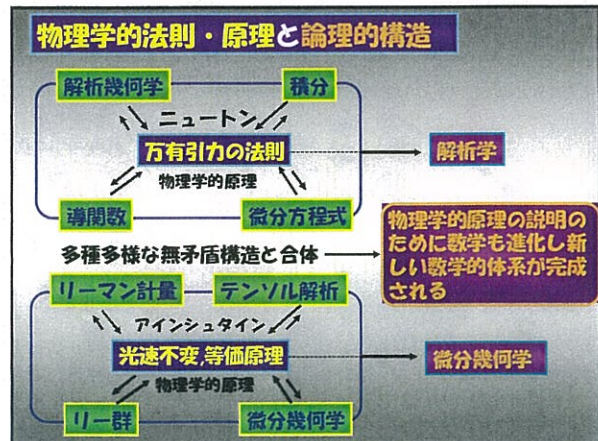
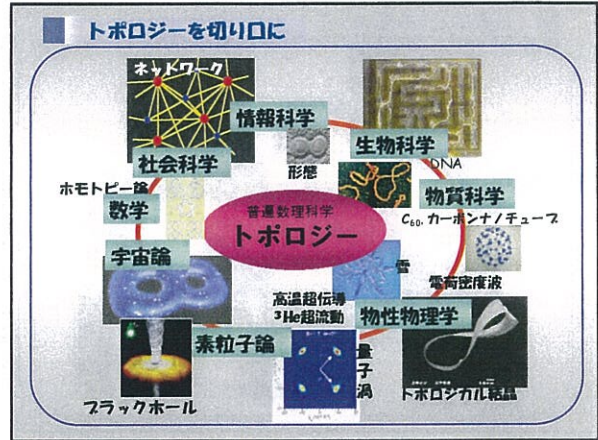
## 要素還元科学

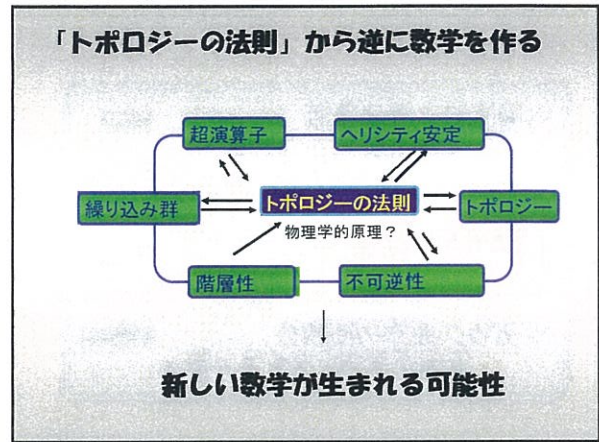
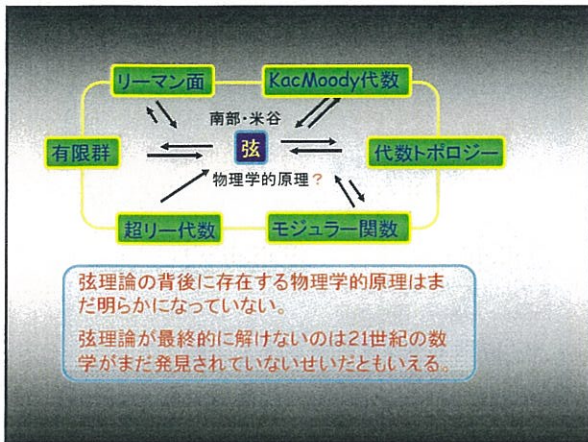




### Topological Approach

素粒子・重力場の理論	凝縮系物理
(1+1)次元	
カイラル量子異常 Chiral Anomaly	ジョセフソン素子 Josephson Junction
トポロジカルソリトン Topological Soliton	不整合CDW Incommensurate CDW
ベリー位相 Berry Phase	高分子 (分数電荷) Polymer
	光ファイバー Optical Fiber
	光スピンホール効果
(2+1)次元	
パリティ量子異常 Parity Anomaly	整数量子ホール効果 Quantum Hall Effect
チャーン・シモン項 Chern-Simons Term	Farady Rotation
	分数統計 Fractional Statistics (Anyon)
	分数量子ホール効果 FQHE
	CuO・RuO・FeTe系超伝導: He <sub>3</sub> 滴、Graphen
(3+1)次元	
ゲージ場 Gauge Field	Aharonov-Bohm Effect
一般相対論 General Relativity	結晶転位・回位 Dislocation, Disclination





### 曲線の曲率

- 滑らかな曲線上の点  $P$
- 円で近似

- 曲率半径:  $r$
- 曲率:  $\kappa = \frac{1}{r}$

### 曲面の曲率

曲面に接する接平面に直交座標

主曲率:  
 $\kappa_x = 1/R_x, \kappa_y = 1/R_y$

平均曲率:  
 $H = \frac{1}{2}(\kappa_x + \kappa_y)$

ガウス曲率:  
 $K = \kappa_x \kappa_y$

### 極小曲面 (minimal surface)

平均曲率  $H=0$  の曲面

$$H = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} = 0$$

- 平面  $K=0$  または 負曲率曲面  $K = -\frac{1}{R^2} < 0$

シャボン膜 (プラトー問題)

- 曲線で境界を定めるときに極小曲面は面積最小

### ガウス曲率

- $K > 0$ : 正 (ガウス) 曲率
- $K = 0$ : 平坦  $\rightarrow$  平面、円筒
- $K < 0$ : 負曲率

### ガウスーボンネの定理

- 局所的な微分幾何  $\chi=0$   
 ⇨ 大域的なトポロジー

$$\int_S K dS = 2\pi\chi$$
 $\chi=2$

- ガウス曲率の面積分  $\chi=-2$   
 ⇨ 位相不変量: オイラー数  $\chi$



### オイラー数


$\chi = F - E + V$

	F	E	V	$\chi$
正四面体	4	6	4	2
正六面体	6	12	8	2
正二十面体	20	30	12	2

オイラーの多面体定理  $\chi=2$

面数F、辺数E、頂点数V

- 穴が1つある多面体では  $\chi = 0$   
 ⇨ 穴が1つ当たり-2

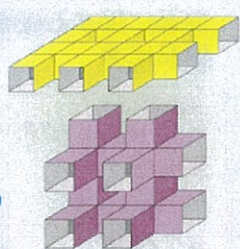


### オイラー数2 (周期的)

	F	E	V	$\chi$
2d格子(a)	10	20	8	-2
3d格子(b)	12	24	8	-4

- 造単位格子当たりの面数F、辺数E、頂点数V、オイラー数  $\chi$

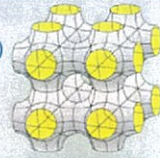
Primitive構造





### 3次元周期的極小曲面 (triply periodic minimal surface)

- 数学者
  - 1865年 シュワルツ(Schwarz)
    - P (primitive) 曲面、
    - D (diamond) 曲面
  - 1970年 シェーン(Schoen)
    - G (gyroid) 曲面
  - 1990年代以降 計算機
- 物理学者ホルスト(Holyst)ら、結晶学者マックイ(Mackay)ら

2つの合同なラビリンス



### 共連続相の発見

1960年代Luzzatiら界面活性剤系G相

- 有機: 両親媒性分子、液晶ブロック共重合体
- 無機: ゼオライト、メソ多孔体シリカ
- 有機-無機ハイブリッド
- 生体内: ミトコンドリア(ATP合成)、滑面小胞体(タンパク質、脂質合成)、網膜色素細胞、葉緑体(光合成) ⇨ 代謝機能?

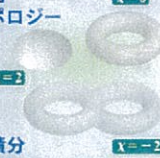
### ガウスーボンネの定理


- 局所的な微分幾何  $\chi=0$   
 ⇨ 大域的なトポロジー

$$\int_S K dS = 2\pi\chi$$
 $\chi=2$

- ガウス曲率の面積分  $\chi=-2$   
 ⇨ 位相不変量: オイラー数  $\chi$

メビウスの帯のオイラー数はいくつか?





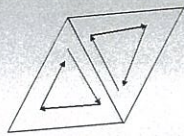
$\chi = 0$

$\chi = 0$

オイラー数は一致してしまう

連続変形では一致しない  $\Rightarrow$  新たな不変量


### 三角形分割



三角形の辺に矢印をつける  
隣り合う共通の辺の所は矢印の方向が逆になるようにできるなら向き付け可能。そうでないとき、向き付け不可能。


**球面**  $S^2$  は向き付け可能である。  
正四面体で確かめよ。

**円筒**  $S^1 \times I$  も向き付け可能である。



上の図で確かめよ。

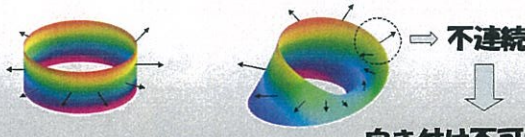
**メビウスの帯**  $M$  は向き付け不可能である。



上の図で確かめよ。

### 別の定義

法線ベクトルを連続に立てられるならば向き付け可能。そうでなければ向き付け不可能。



$\Rightarrow$  不連続  
 $\downarrow$   
向き付け不可能

向き付け可能  
orientable



向き付け不可能  
non-orientable

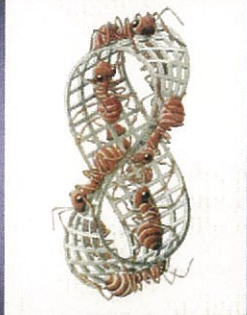


向き付け可能もトポロジカル不変量

### トポロジカル不変量

	記号	オイラー数	向き付け
円筒	$S^1 \times I$	$\chi = 0$	可能
トーラス	$S^1 \times S^1$	$\chi = 0$	可能
球面	$S^2$	$\chi = 2$	可能
メビウス	$M$	$\chi = 0$	不可能
クラインの壺	$K$	$\chi = 0$	不可能
...	...	...	...

### Introduction: Escher's ants



蟻は2周してはじめて元にもどる。  
裏と表の区別がない

エキゾチックな単側性の世界

↑  
芸術家から科学者まで

帯自体 → 格子, 結晶  
蟻 → 電子, スピン, 光子, 超伝導, 電荷密度波

そういう場を作るのか?  
何が起るのか?

Möbius Strips II (1963)  
by M. C. Escher

東洋 > 西洋 有でもない無でもない

白隠禅師  
メビウスより100年前から気が付いていた。

有相 (形あるもの: 物: 意)  
無相 (形なきもの: 事: 空)

有 → 色 → 空

有相でも無相でもないそれを起えた実相

色即空, 空即色也

裏表のない心

禪画: 布袋図

反転

スイス・ドイツ・イタリアなどを展覧会

### メビウスの帯

1758年 白隠禅師 (中興の祖: 禅僧: 1685~1768)  
「メビウスの帯」の禪画を描き色即空をとく  
東洋 (の哲学)

1858年 メビウス (ドイツ数学者: 1790~1868)  
「メビウスの帯」を提唱  
西洋 (の数学)

2002年 北大 「メビウスの帯」結晶を発見  
東洋 (の発見)

### トポロジー工科学



### リング



磁石

### メビウス



トポロジカル欠陥

磁化決まるか?  
トポロジカル欠陥は安定か!?

動いたり生成消滅ダイナミクス

(1) 空間の大局的トポロジーによって秩序状態が異なる  
(2) 大局的トポロジーがトポロジカル欠陥に与える影響

↓

物性だけでなく「初期宇宙」の問題にも関連  
仮説

モノポールが見つからないのは宇宙の大局的トポロジーによる可能性がある



### 宇宙

相転移  
高 対称性の破れ  
低 トポロジカル欠陥

Big Bang → 現在

時間

### モノポール問題

1つの力  
モノポール (点欠陥)

↓

4つの力 (重力, 強い力, 弱い力, 電磁力)  
大統一理論

### ≠

### 観測 → 見つからず

### 固体物理

Kibble mechanism  
T < Tc 急冷

磁性体 2次元XYモデル  
トポロジカル欠陥 (点欠陥)

3次元超伝導・電荷密度波  
渦糸・位相ソリトン (線欠陥)

### トポロジーが物理的性質を変える例: 2粒子交換

時計回り:  $\Psi(r_1, r_2) = e^{i\theta} \Psi(r_2, r_1)$

反時計回り:  $\Psi(r_1, r_2) = e^{-i\theta} \Psi(r_2, r_1)$

3次元:  $e^{i\theta} = e^{-i\theta} \Rightarrow \sin \theta = 0$

$\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$  フェルミオン  
 $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  ボソン

2次元 平面:  $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta} \Rightarrow \theta = \text{any}$  → エニオン

2次元 球面:  $e^{i\theta} = e^{-i\theta} \Rightarrow \sin \theta = 0$  → フェルミオン, ボソン

トポロジーが粒子の種類を決めたり, 統計性を制御できる

$\theta$ : (Berry 位相)

### Berry位相

断熱近似・パラメータ空間の閉回路 (実空間でもいいし、k空間でも、どんな空間でもいい) 上を、粒子を動かすと余分な位相がつく

**実空間のトポロジー、曲率**

この場合は立体角  
 $\gamma = 4\pi R^2 \sin^2 \theta / 2$  (4周で元に戻る)  
 平面上では決して位相はつかない  
 円筒にはベリー位相はつかない

AF秩序空間では穴が開いていれはがたがたしている (曲率がある) のでゼロ点を動かすことは曲がった面を動かすことに対応している。

**パラメータ空間のトポロジー**

見た目には平面だがスピン空間では曲がっている。 $\gamma = 2\pi / 10 = \pi / 5$  (10周で元に戻る)  
 ホールを動かしただけで位相がつく  
 もしフェロ秩序空間なら、均一なのでホールが動いても変わらない。

質問: メビウスの帯上を一周したらベリー位相はいくらになる?

### Berry位相

位相干渉長程度の系における伝導現象

電子の波動性が関与

量子伝導

量子伝導と位相

- AB効果
- UCF
- 弱局在
- etc

メソスコピック導体におけるBerry位相の研究

### Berry位相 (Berry, 1984)

$H$ : ハミルトニアン  
 $R(t)$ :  $H$ に含まれる時間変化パラメーター

$R(t_0) \Rightarrow R(t_0+T)$   
 断熱的に変化

$H(R(t_0)) = H(R(t_0+T))$

$\psi(t_0) = \psi(t_0+T)$

$e^{i\theta}$

$\theta$ : Berryの位相

<実験的な観測>

- 光ファイバーによる実験
- メソスコピックリング
- ...

### メソスコピックリングを用いた実験

A.F. Morpurgo (1998)

電場

Rashba効果

磁場が傾く

$H(B(t_0)) = H(B(t_0+T))$

波動関数にBerry位相が付加

### AB効果と幾何学的 (ファイバーバンドル) 考察

電磁場がない  
 $A=0$

### ガウス・ボンネの定理 ↔ ポアンカレ・ホップの定理

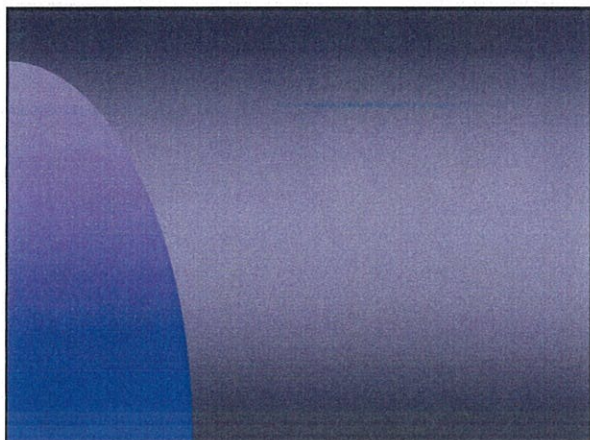
$\frac{1}{2\pi} \int_M K dM = \chi$

$M$ のガウス曲率  $K$ の積分 =  $M$ のオイラー数 =  $M$ のベクトル場の特異点の指数の和

山、谷 +1  
 峠 -1

①微分幾何学的方法  
 局所的な曲がり具合 (曲率) を定義しそれを曲面全体で積分する方法。接続、曲率の概念。

②トポロジカルな方法  
 ベクトルバンドルのねじれ具合を有限個の点に集約してその特異点の指数をすべてたしあげる方法。ファイバーバンドル、障害理論、(留数定理)



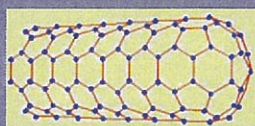
## Difficulties towards "Möbius Crystals"

Crystal rigidity (bending, twisting)

Translational periodic symmetry

## Topological materials

(CNT,  $C_{60}$ )



CNT  
Cylindrical



$C_{60}$   
Sphere

## Our Goal

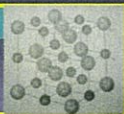
Realization of fields for topological effect !!

## 次元性とトポロジカル物質

3次元物質：弾性体、バルキー

Nb, Si, Fe: 超伝導体、半導体、磁性体

NaCl, NiO, BaTiO<sub>3</sub>: 絶縁体、誘電体



NaCl, Au  
Nb

2次元物質：層状物質、レイヤー

$MX_2$ : 電荷密度波、超伝導

グラファイト: 半金属

$NiCl_2$ : 低次元スピン系



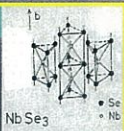
$C_{60}$   
CNT  
 $NbSe_2$

1次元物質：針状物質、ファイバー

$MX_3$ : 電荷密度波、超伝導

ポリアセチレン: 金属

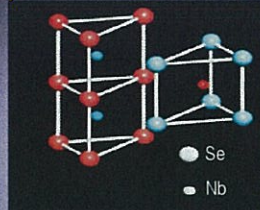
DNA: 生体・情報物質



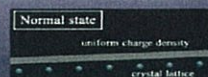
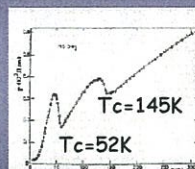
リング  
メビウス結晶  
 $NbSe_3$

## $NbSe_3$ : Crystal Structure

CDW: Charge-Density-Waves system



easily bent, twist



Transition

A periodic charge modulation



**超伝導と電荷密度波(CDW): 巨視的量子コヒーレンス**

超伝導	90年	CDW	30年
ゲージ対称性破れ、超伝導、マイスナー $T_c = 150$ K		並進対称性の破れ、 <b>フレリット超伝導</b> $T_c = 600$ K	
Josephson効果	シャピロステップ	狭帯域ノイズ	シャピロステップ
SQUID	永久電流、量子干渉	<b>リング結晶、マビウス結晶</b>	
KT 転移		未確認 → <b>ナンチューブ、超電導</b>	
磁束		位相ソリトン 局所分極(電束的) discomm.	
ストライプ相 (CuO 面)		1T-TaSe <sub>2</sub> , 1T-TaSe <sub>3</sub> : ストライプ、ハニカム	
Andreev 散乱、近接効果		量子ホール効果: ストライプ、ウグナー格子	
		Andreev 散乱、近接効果	

**NbSe<sub>3</sub> : CDW**  
**Researches in Hokkaido Univ.**

Discovery of CDW in NbSe<sub>3</sub>: Sambongi, Yamaya, Tsutsumi (1977)  
 Memory Effect of Sliding CDW in NbSe<sub>3</sub>: Ido, Oda, Okajima (1986)  
 Discovery of Ring Crystals in NbSe<sub>3</sub>: Kawamoto, Okajima, Tanda, Yamaya (1999)  
 Möbius Crystals in NbSe<sub>3</sub>: Tanda, Tsuneta, Inagaki, Okajima, Yamaya, Hatakenaka, Nature 417 (2002) 397; JCG (2005)  
 Hopf-Link Crystals in TaSe<sub>3</sub>: Matsuura, Matsuyama, Tando, JCG (2006)

**Synthesize and Condition**

**Chemical Vapor Transportation**  
 Closed Quartz Tube  
 $<10^{-7}$  Torr (initial vacuum)  
 10 days  
 Nb, Ta (99.999%),  
 Se (99.9999%)  
 Furnace Temperature  
 600°C ~ 800°C

Starting materials (Nb, Se) is sealed in an evacuated ampoule.

- 1. heating**
- 2. transportation**
- 3. final stage**

After a few weeks of heating, products are transported to the lowest-temperature end where vapor pressure is also the lowest.

**Fibers**

The fibers are typically  $1\mu\text{m} \times 0.1\mu\text{m}$  (cross section)  $\times 10\text{mm}$  (long).

**Ring Crystals (0 $\pi$ )**


**Seamless!!**

**Nonequilibrium condition**


Se circulates through  
**Vapor, mist, liquid droplet**  
 ↓  
 Like a Earth system

These droplet need for formation of ring crystals.


### Formation of Ring Crystals



a growing crystal can eat its own tail.



The ribbon-shaped  $NbSe_3$  crystals grown in the viscous Se droplet are bent due to Se surface tension.



circulating  $NbSe_3$  fiber on the equator of Se droplets during growth

Seamless ring

### リング及びチューブ結晶 ( $0\pi$ )




Tube-like



Tube with hole



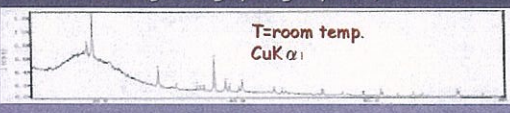
Hole radius is less than  $1 \mu m$  !!

CDW Correlation length is  $5 \mu m$ , which is larger than hole radius!!

This matter is ideal system in observation of Interference effect of CDW

### X-ray Diffraction

Powder Method (grinding up ring-crystals)



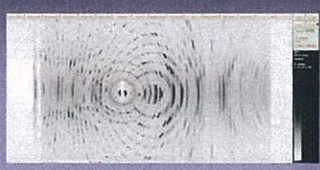

T=room temp.  $CuK\alpha_1$

$2\theta$

**$NbSe_3$  Single Phase**  
 Not  $Nb_2Se_3, NbSe_2, Nb_3Se_4, Nb_2Se_9$

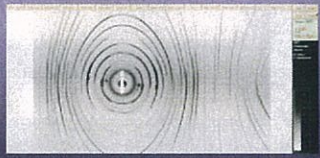
**Monoclinic ( $P2_1/m$ )  $NbSe_3$  !!**  
 lattice constants  $a=10.01 \text{ \AA}$   
 $b=3.48 \text{ \AA}$   
 $c=15.63 \text{ \AA}, \beta=108.5^\circ$

### X-ray Diffraction: Ring Spring8

Imaging Plate

Ring X-ray

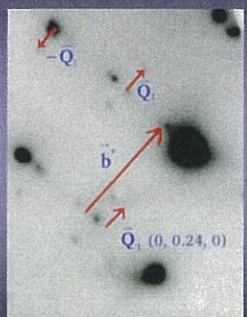


Ring X-ray

Line is homogeneous

**Single Crystals !!**

### Electron Diffraction Pattern

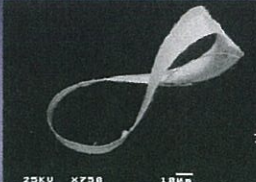



$T_{c1} = 145K$   
 $T_{c2} = 52K$   
 $T = 138K$   
 $Q = (0, 0.24, 0)$

$Q_1 (0, 0.24, 0)$

Existence of CDW state in the  $NbSe_3$  Ring-Crystals !!

### 8の字結晶の数学的性質 ( $2\pi$ )

長時間成長

**最大結晶体!**

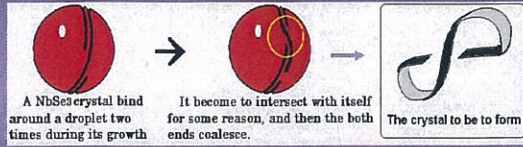
ホール2軸は直交

ハートマン-ニレンバーグ定理  
 Math. Ann. 322, 573 (2002)

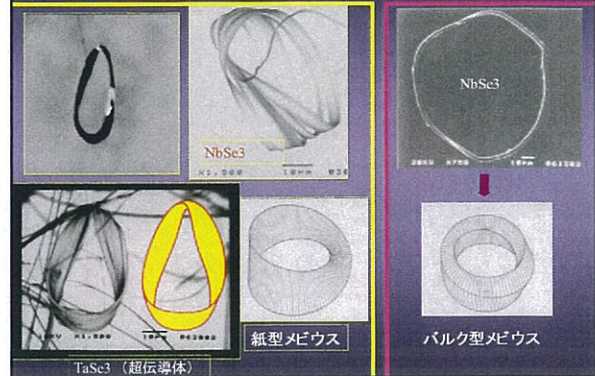
リング結晶 ( $0\pi$ ) は自己交差がないので無限に大きくなる → チューブ結晶

**自己交差型結晶体の発見**

## Mechanism of formation of Figure 8 Crystals



## 2種類のメビウス結晶 (π)



## Bending to Twisting formation mechanism of Möbius crystals

Difficulties → twisting shear

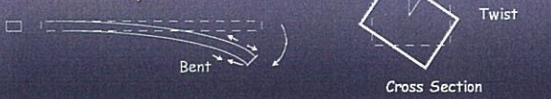
Question is how the twisting is introduced without actual shear forces

Answer

Crystal symmetry → The bending-twisting conversion

Bending ↔ Twisting  
Compliance

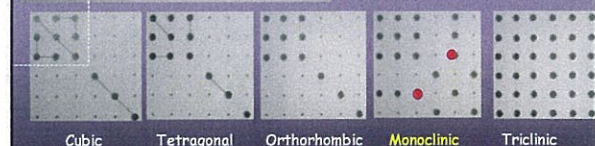
Monoclinic, triclinic



## Compliance

Elasticity (Expansion of Hook's law)  
 $\sigma = k \epsilon \rightarrow \epsilon = (1/k) \times \sigma$  Stress:  $\sigma$   
Strain:  $\epsilon$

$S_{ij}$  Compliance tensor

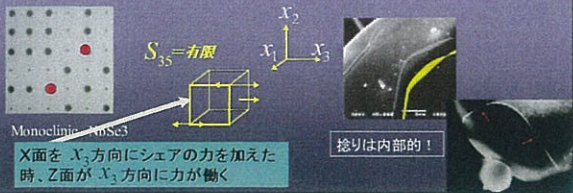
$$\begin{matrix}
 \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6
 \end{matrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\
 S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\
 S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\
 S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\
 S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\
 S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66}
 \end{pmatrix}
 \begin{matrix}
 \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6
 \end{matrix}$$


Lower symmetry

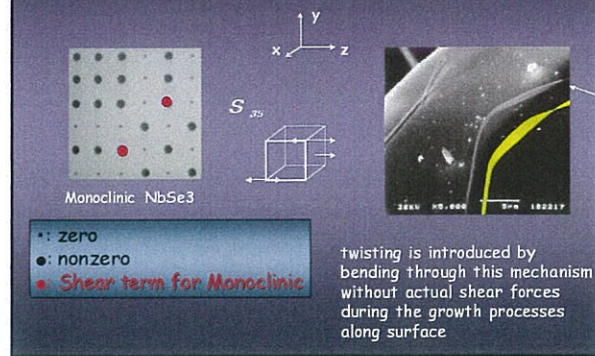
## Bending to Twisting 曲げ→捻り

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{M}{2I} S_{35}$$

捻り角 Angle of twist  $\theta \propto -S_{35}$



## Evidence of Twisting



## Formation of Möbius Crystals

To form a Möbius strip ( $1\pi$ ), a twist is needed to be introduced during spooling.

## Summary of formation Mechanism

Ring ( $L=1$ ) Möbius ( $L=3/2$ ) Figure-8 ( $L=2$ )

So the materials are classified by **Linking number L** and **Twist number N** which is defined as N of a twist of  $N\pi$  introduced during circling a loop.

↓

**Knot Crystals**

## Evolution of concept of crystal : Rotational Symmetry

e.g., Graphite      e.g., CNT

Translational symmetry      Rotational symmetry      +      Twisting symmetry

Topological defect Dislocations      Topological defect Disclinations

$\Phi = \phi + ei\theta$

Möbius and 8-figure

How should these materials group have been expressed?

## 回位 (Disclinations) とトポロジカル結晶の関係

内部回位 (Internal disclinations) 2次元面内に欠陥がある

外部回位 (External disclinations) 2次元面外に欠陥があってもよい(結晶)

局所回位 Local disclinations 局所的欠陥

Twist 局所的ツイスト  $\omega = \pi$

大局回位 Global wedge disclinations 大局的な欠陥ともいえるし、チューブ結晶ともいえる  $\omega = 2\pi$

局所回位 Local wedge disclinations

Topological Defect      Topological Crystals

局所の特異点表現      大局的トポロジー

外部大局回位をもつ結晶 ⇔ チューブ結晶

## Topological Crystals の分類

外部大局回位 ( $\omega = 2m\pi$ ) をもつ結晶 ⇔ チューブ結晶、リング結晶

さらに外部大局ひねり回位 ( $\omega^* = n\pi$ ) をもつ結晶 ⇔  $\pi$ -ツイスト結晶、8の字結晶

Ring:  $\omega = 2\pi, \omega^* = 0\pi, L_k = 1$

Möbius:  $\omega = 2\pi, \omega^* = 1\pi, L_k = 3/2$

Figure-8:  $\omega = 2\pi, \omega^* = 2\pi, L_k = 2$

$L_k = (\omega + \omega^*) / 2\pi = m + n/2$

リンキング数

結び目結晶をはじめめて定義

(旧来の結晶学) 局所理論 Frank index ( $\omega, \omega^*$ )

微分幾何学

トポロジーは局所的性質と大局的性質を相補的に結びつける方法ともいえる

大局的表現 Linking数  $L_k$  (大局的) 位相幾何学

場	内部対称性		外部対称性		2次元面
	流体場	ゲージ場	時空	結晶場	
微分幾何	$v = \nabla\theta + \alpha \nabla\beta$	$d = \nabla\theta + \alpha \nabla\beta$			
接続	$\nabla$	$A$	$\Gamma$	$\Gamma$	
曲率	$\omega$	$dA$	$d\Gamma$	$K$	$K$
振数	$v\omega$	$AdA$	$\Gamma d\Gamma$	$\Gamma K$	
	$0\omega$	$0dA$		$CS$	

トポロジカル数

Winding数  $\Gamma$ : 循環  $\phi$ : 恒束

Chern数  $\omega$ : ヘルムホルツ CS: CS項

Euler数  $K$   $\chi$

## ガウス・ボンネの定理

- 局所的な微分幾何 ↔ 大域的なトポロジー  $\chi=0$

$\int_S K dS = 2\pi\chi$ 
 $\chi=2$

- ガウス曲率の面積分  $\chi=-2$
- ↔ 位相不変量: オイラー数  $\chi$

## ガウス・ボンネの定理 ↔ ポアンカレ・ホップの定理

$\frac{1}{2\pi} \int_M K dM = \chi$

単なる図形をベクトル場として見方をする

Mのガウス曲率 Kの積分 = Mのオイラー数 = Mのベクトル場の特異点の指数の和

幾何学的手法の経路: 三角分割 → トポロジカル変型 → 特異点の指数を算出する

$\chi = \text{点} - \text{線} + \text{面} = 9 - 16 + 8 = 1$        $\chi = +5 - 4 = 1$

雨を降らせ雨水の流れ → 曲面上にベクトル場

山、谷 +1  
峠 -1

1 微分幾何学的方法

局所的な曲がり具合(曲率)を定義しそれを曲面全体で積分する方法。接続、曲率の概念。

2 トポロジカル方法

ベクトルバンドルのおしれ具合を有限個の点に集約してその特異点の指数をすべてたしあげる方法。ファイバーバンドル、障害理論、(留数定理)

ところが、リンク数でも定義できない?

Matsuura, et al.: JCG (2006)  
松浦・松山・島中・山中・豊島・丹田

### ホップリンク結晶の発見

## 埋め込み多様体として結晶を分類

NbSe<sub>2</sub> トポロジカル結晶

リング    メビウス    Bの字

世界初のホップリンク結晶

Matsuura, Matsuyama, Tanda: JCG (2006)

球面

クラインの壺

トーラス

ダブルトーラス

埋め込み多様体

局所的理論ではなく、大局的な埋め込み多様体として分類されなければならない  
→ 新しい結晶学の構築

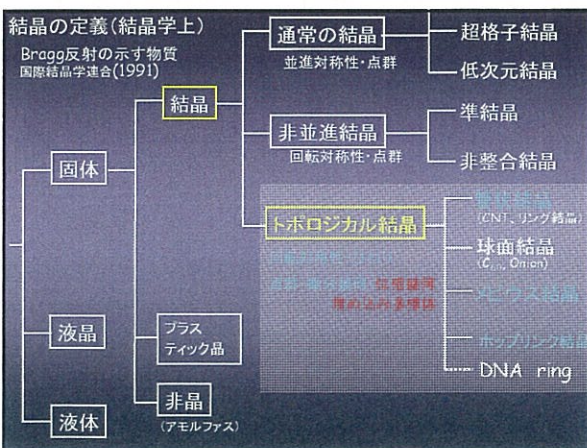


Figure 2. Pictures of the paper model of transformation from a 3-entwined ring to a Möbius strip. (a) The initial form of the 3-entwined ring ( $W_3 = 3$ ). (b) The ring transforms to that a Möbius strip form under the conservation of  $T_3 = 4W_3$ . (c)  $T_3 = 1, W_3 = 2$ . (d) After the connection between surface, it become Möbius strip crystal ( $T_3 = 1, 2W_3 = 1$ ).

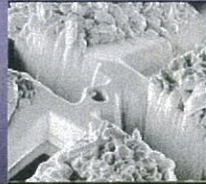
## NbSe<sub>3</sub> microrings fabricated by FIB



Cut into Disks



Hole radius ( $R$ ) is  $1.2 \mu\text{m}$   
Correlation length of CDW ( $\xi$ ) is  $5 \mu\text{m}$

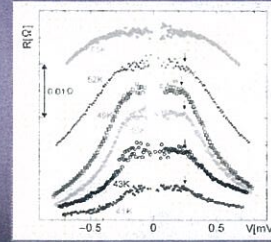


$$R < \xi$$

AB-ring shape from the disk

## Sliding of CDW

I-V Characteristics

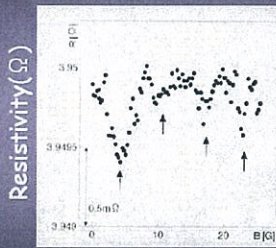


$E_{th} = 1.0 \text{ mV/cm}$

Ribbons, Large Ring  
 $350 \text{ mV/cm}$

Easy to CDW-sliding for small rings

## AB-Effect of CDW: NbSe<sub>3</sub>



Periodicity is near  $h/e$

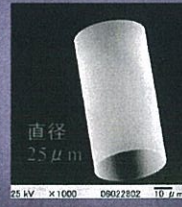
Interference of CDW



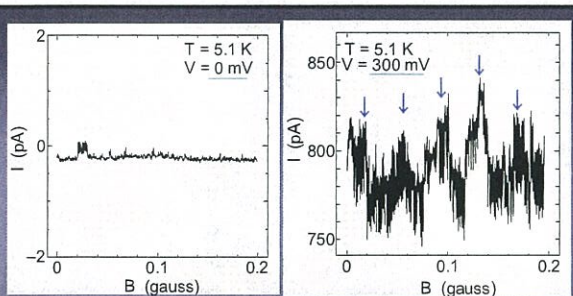
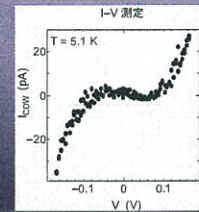
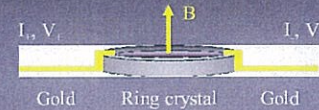
Magnetic Field B (gauss)

$I = 150 \mu\text{A}$ ,  $T = 49\text{K}$   
 $V_{th}$  of CDW =  $1.0 \text{ mV/cm}$

## Aharonov-Bohm effect of CDW : TaS<sub>3</sub>



TaS<sub>3</sub> Tube crystal



周期:  $3.8 \times 10^{-2} \text{ gauss}$   
リング結晶の面積:  $S = 5.6 \times 10^{-10} \text{ m}^2$

$$e^* = 3.1 \times 10^{-19} \text{ C} \approx 2e$$

$\frac{h}{2e}$  周期で振動

$$\Delta B = \frac{h/e^*}{S}$$

$$\left( \begin{array}{l} e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \end{array} \right)$$

## TEM/STM/SEM

- Supercluster of Electrons in Ultrathin TaSe<sub>2</sub> Nanocrystals JPSJ (2006)
- Topologically linked crystals JCG (2006)
- Imaging of NbSe<sub>3</sub> nanotube by STM J.Phys.IV(2005)
- Formation of metallic NbSe<sub>3</sub> nanotubes and nanofibers CAP (2004)
- Formation and growth of NbSe<sub>3</sub> topological crystals JCG (2004)

## 高周波測定

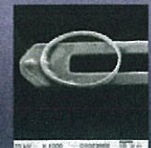
- Topological effect of CDW in ring-shaped crystals of NbSe<sub>3</sub> PRB (2006)
- Anomalous coherent phonon oscillations in the commensurate phase of the quasi-two-dimensional 1T-TaS<sub>3</sub> compound PRB (2005)

## Femto秒パルスレーザー

- Quenching of phase coherence in quasi-one-dimensional ring crystals PRB (2007)
- Selective optical probing of the charge-density-wave phases in NbSe<sub>3</sub> PRB (2006)

## 輸送現象・磁気抵抗測定

- Finite-size effects on transverse magnetoresistance of NbSe<sub>3</sub> PRB (2005)
- Violation of Kohler's Rule in the Magnetoresistance near the Lower CDW Instability in NbSe<sub>3</sub> JPSJ (2005)
- Fabrication of nanoscale CDW systems APL (2005)



カンチレバー無電極

トポロジカル結晶学

リング、メビウス、8の字結晶の発見  
トポロジカル不変量的記述から(欠陥理論の拡張)

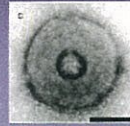
埋め込み多様体へ(ホップリンク結晶の発見)

CDWのAB効果の発見

電子、超伝導につぐ第三の電子系のAB効果

Propagation of Topological Crystals

Spooling Mechanism is Universal



DNA ring Crystals

Takenaka et. al., TOP 2005

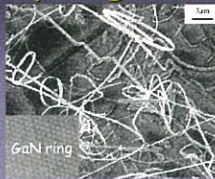


ZnO ring Crystals

Z.L. Wang; Science 2004

Our discovery triggered investigation of topological crystals in other materials.

Topological materials



GaN ring



CNT-ring (Torus)

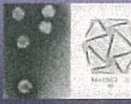
Biomaterials



Ribosome



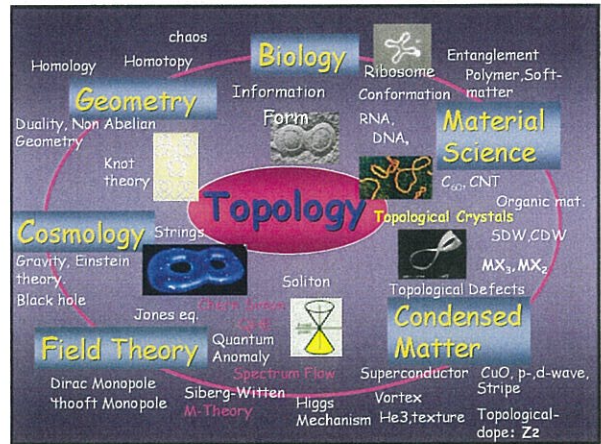
Bacterium



Virus (icosahedrons)



Ring DNA



物理幾何是一家  
共同携手到天涯  
黑洞单极穷奥秘  
纤维连络织锦霞  
进化方程孤立異  
对偶曲率瞬即空  
筹算竟有天人用  
拈筆微笑欲忘言

陳省身



Chern  
1911—2005

