（大学院共通授業科目　「トポロジー理工学特別講義I」（科学とトポロジー））

トポロジー入門

足立 二郎　（理学研究院 数学部門）

2010年4月16日

◎トポロジー（位相幾何学）とは何だろうか？

- トポロジー（位相幾何学）とは，幾何学の一分野です.
- 数学のなかでも，現在活発に研究されている分野の一つと言えるでしょう.

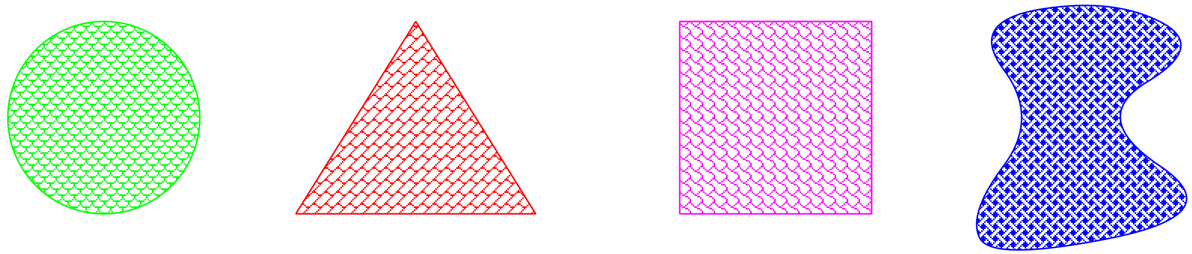
  ・2006年，トポロジーの大問題であった「ポアンカレ予想」の解決により，数学のノーベル賞とも言われるフィールズ賞がPerelmanさんに与えられています.

  （彼はそれを辞退.）

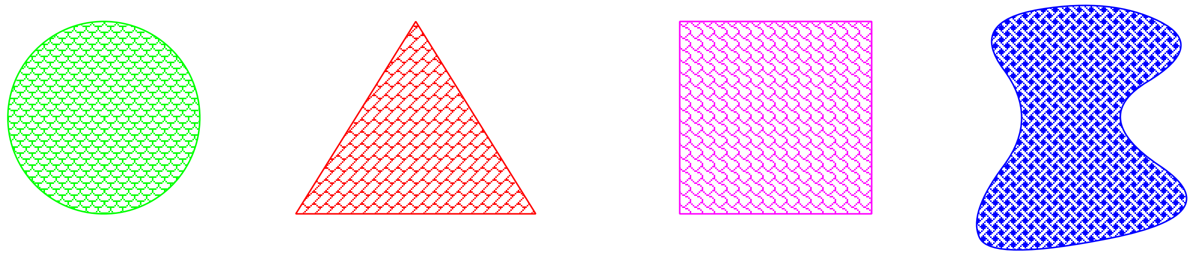
◎トポロジー（位相幾何学）とは何だろうか？

- トポロジー（位相幾何学）とは，幾何学の一分野です．
- 数学のなかでも，現在活発に研究されている分野の一つと言えるでしょう．
  - ・2006年，トポロジーの大問題であった「ポアンカレ予想」の解決により，数学のノーベル賞とも言われるフィールズ賞がPerelmanさんに与えられています．（彼はそれを辞退．）
- トポロジーとは，「ものつながり具合を表す概念」であると言われます．
- トポロジーとは，「柔らかい幾何学」であると言われます．

- トポロジーでは,「伸ばしたり，縮めたり，曲げたり」して重ねられるものは同じとみなします.



•トポロジーでは,「伸ばしたり，縮めたり，曲げたり」して
重ねられるものは同じとみなします.



•ある意味では「鈍感」にも見えますが，ものごとの「本質を」とらえているとも言えるでしょう.

•比較的 新しい数学なので，これからの応用が期待されます.
（次回以降に 乞う御期待！）

今日の予定　（数学のおはなし）

– トポロジーへの第一歩 ･･･ 「同相」の概念の導入.

– ポアンカレ予想と基本群 ･･･

先に述べたポアンカレ予想の意味の理解.

– ３次元多様体とHeegaard分解 ･･･ ある考え方.

今日の予定　（数学のおはなし）

– トポロジーへの第一歩 ··· 「同相」の概念の導入．

– ポアンカレ予想と基本群 ···

先に述べたポアンカレ予想の意味の理解．

– ３次元多様体とHeegaard分解 ··· ある考え方．

注意

– “トポロジー” と言ったとき,「位相幾何学」の場合と,

空間上の構造としての「位相」の場合がある．

– phase の翻訳である「位相」とは別物である．

トポロジーへの第一歩

◎幾何学におけるいくつかの価値観

- 幾何学では,「図形」を扱います.
- では，どのような時に二つの「図形」は「同じ」だとみなすでしょうか？

トポロジーへの第一歩

◎幾何学におけるいくつかの価値観

- 幾何学では,「図形」を扱います.
- では，どのような時に二つの「図形」は
  「同じ」だとみなすでしょうか？
- それには，いくつかの基準があり,
  各基準に対応してそれぞれの「幾何学」があります.

トポロジーへの第一歩

◎幾何学におけるいくつかの価値観

- 幾何学では,「図形」を扱います.
- では，どのような時に二つの「図形」は
  「同じ」だとみなすでしょうか？
- それには，いくつかの基準があり，
  各基準に対応してそれぞれの「幾何学」があります.
- トポロジー（位相幾何学）の場合,
  二つの図形が「同相（位相同型）」の時,
  同じであるとみなします.

トポロジーへの第一歩

◎幾何学におけるいくつかの価値観

- 幾何学では,「図形」を扱います.
- では，どのような時に二つの「図形」は
  「同じ」だとみなすでしょうか？
- それには，いくつかの基準があり，
  各基準に対応してそれぞれの「幾何学」があります.
- トポロジー（位相幾何学）の場合,
  二つの図形が「同相（位相同型）」の時,
  同じであるとみなします.

“同相（位相同型）” とはどういうことでしょうか!?

◎同相写像の定義．

同相には，二つの意味が込められています：

- 集合として同じ，
- 点のつながり方を変えない．

◎同相写像の定義.

同相には，二つの意味が込められています：

- 集合として同じ，
- 点のつながり方を変えない．

厳密な定義は次の様になります：

定義　X，Y：位相空間，

写像 $f\colon X \to Y$ は同相写像である

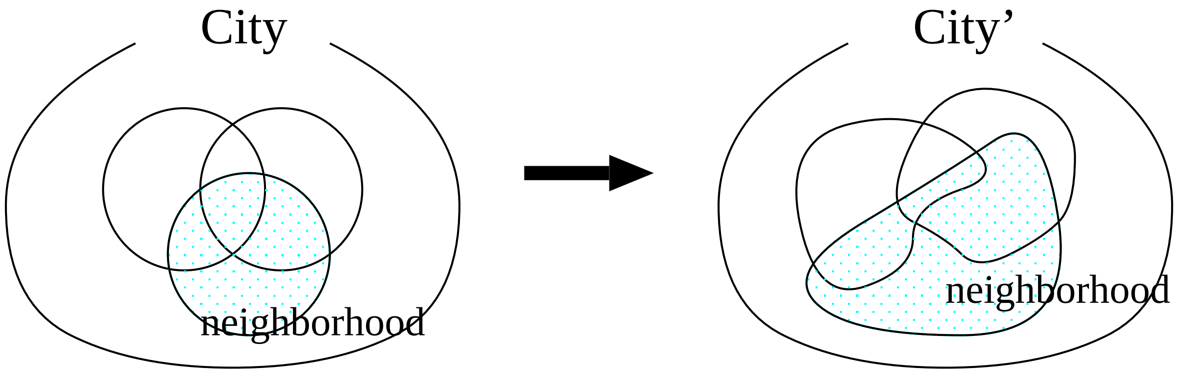
$\overset{\text{def}}{\iff}$ (1) f は全単射，

(2) f，f^{-1} は共に連続写像.

大まかに言って，同相写像 —

（近傍，近所，近いところ）$\longrightarrow$ （近傍，近所，近いところ）.

街から街への まるごとの引越しを考えてみましょう:



- “近い” とはどういうことでしょうか? トポロジー（位相幾何学）では，距離という概念には頼りません.
- 位相（トポロジー） という概念が，
  “近い” という意味を与えます.

位相（トポロジー）

定義 X: 集合,

$\mathcal{O} \subset \{X$ の部分集合$\}$: 部分集合の族.

$\mathcal{O}$ は X 上の **位相（トポロジー）** である

$\Longleftrightarrow$ (1) $X \in \mathcal{O}$, $\emptyset \in \mathcal{O}$,

(2) $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$

(3) $U_\lambda \in \mathcal{O}$, $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

$(X, \mathcal{O})$: **位相空間(topological space)**,

$U \in \mathcal{O}$: **開集合** と呼びます.

↑ これが，“近い” ということの抽象化です.

例 X：集合.

（1） $\mathcal{P}(X) := \{X$ の部分集合$\}$ は X の位相のひとつである.

（離散位相）

（2） $\{\emptyset, X\}$ も X の位相の一つである.（密着位相）

例 X：集合.

（1） $\mathcal{P}(X) := \{X$ の部分集合$\}$ は X の位相のひとつである.

（離散位相）

（2） $\{\emptyset, X\}$ も X の位相の一つである.（密着位相）

問題1： 上の例を確認せよ.

問題2： $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とする.

$U \subset \mathbb{R}^2$：開集合

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $a \in U$ に対し，それぞれ $\varepsilon > 0$ が存在して，

$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \subset U$ をみたす.

これが上の位相の条件を満たすことを確かめよ.

連続写像

定義 $f\colon (X_1, \mathcal{O}_1) \to (X_2, \mathcal{O}_2)$ ： 写像，

が **連続写像**である

$\Longleftrightarrow$ 任意の $U_2 \in \mathcal{O}_2$に対して，$f^{-1}(U_2) \in \mathcal{O}_1$.

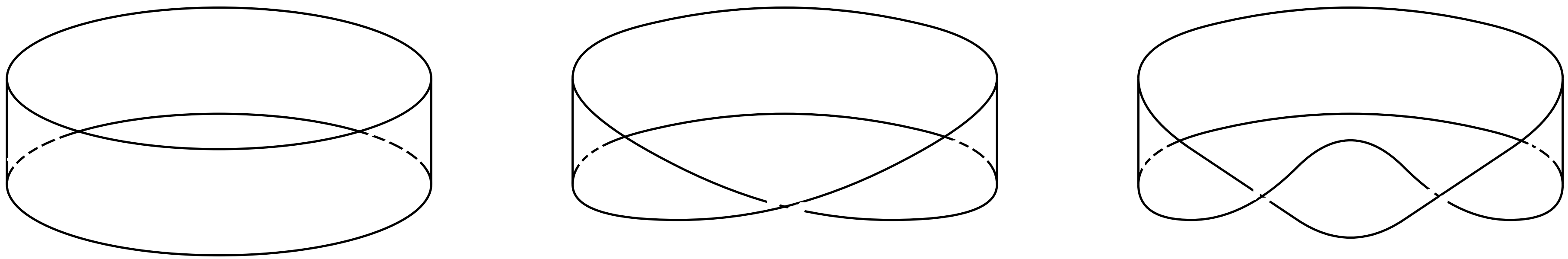
(おおまかには，近いところは 近いところへ)

☆ この写像は，つながり方を変えません.

Remark.

$m(0) \not\approx m\left(\frac{1}{2}\right)$ 同相ではありません，

$m(0) \approx m(1)$ 同相です．



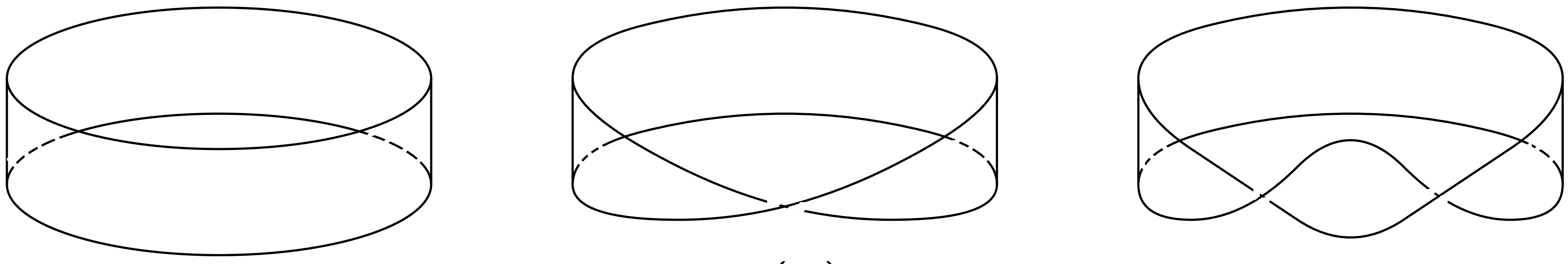
$m(0)$ $m\left(\frac{1}{2}\right)$ $m(1)$

- どんなに捻じっても，$m(0)$ は $m(1)$ にならないじゃないかと思うかもしれません $\cdots$

Remark.

$m(0) \not\approx m\left(\frac{1}{2}\right)$ 同相ではありません,

$m(0) \approx m(1)$ 同相です.



$m(0)$ $\quad$ $m\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $m(1)$

- どんなに捻じっても，$m(0)$ は $m(1)$ にならないじゃないかと思うかもしれません … なりません.
- $S^1 \times [0,1]$ の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みとして,

  $m(0)$ と $m(1)$ は イソトープではありません.

ポアンカレ予想と基本群

◎ポアンカレ予想

予想(H. Poincaré).

M: 3-次元 閉多様体, s.t. 基本群は自明.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ M は 3次元球面と同相である.

ポアンカレ予想と基本群

◎ポアンカレ予想

予想(H. Poincaré).

M: 3-次元 閉多様体, s.t. 基本群は自明.

$\stackrel{!}{\Longrightarrow}$ M は 3次元球面と同相である.

この章の目標:

基本群, 多様体の概念を導入し, この予想の意味を理解しよう.

多様体 (manifold)

n-次元 多様体── 局所的に $\mathbb{R}^n$ と同相.

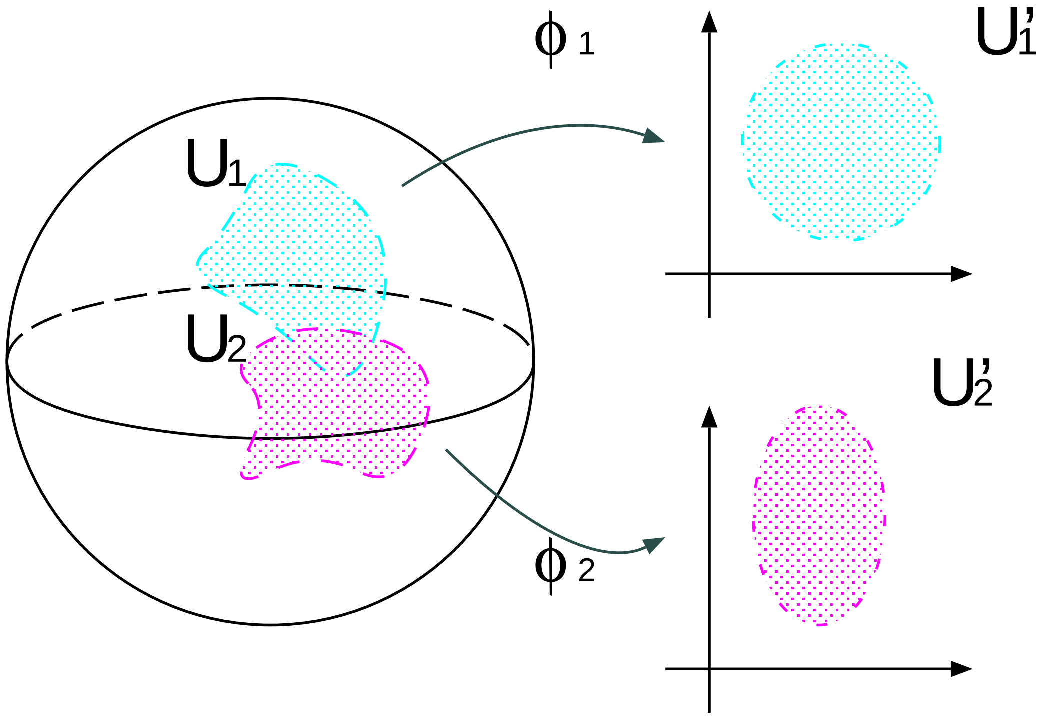
- $(M, \mathcal{O})$: **位相空間. ハウスドルフ空間であると仮定する.**

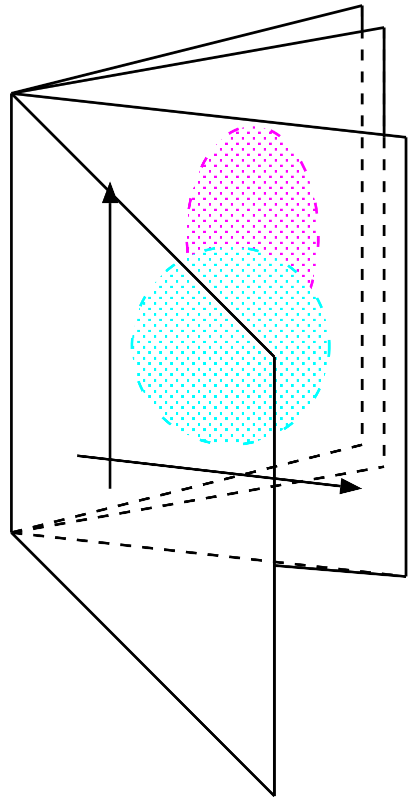
定義 M は n-次元 (位相) **多様体**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 各点 $p \in M$ に対して,

$U \subset M$: pを含む開集合, $U' \subset \mathbb{R}^n$: 開集合,

$\varphi \colon U \to U'$: 同相写像 が存在する.





(U, φ): **chart（海図）**, $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$: **atlas（海図帳）**
と呼ぶ.

- **コンパクト$^{(*)}$な 境界のない多様体を閉多様体と呼ぶ.**

基本群

M 内の円周で１点に縮まないものはどれだけあるでしょう?

- X: 位相空間, $a, b \in X$: 点, $I = [0,1]$,

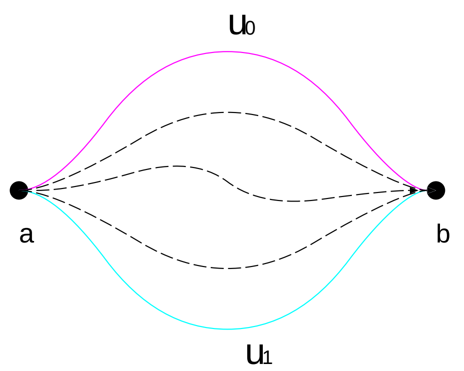
$$\boldsymbol{P(X; a, b)} := \{p\colon I \to X \text{ 連続写像} \mid p(0) = a,\ p(1) = b\}$$

とする.

$u_0,\ u_1 \in P(X; a, b)$ は **ホモトープ（homotopic）**,

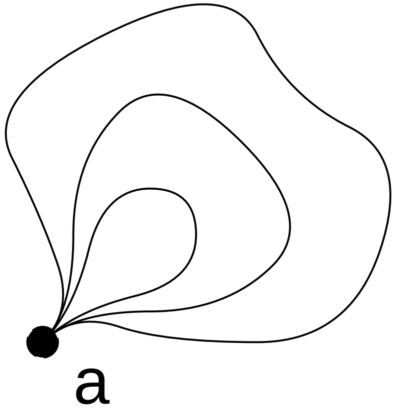
$$(u_0 \simeq u_1),$$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $u_t \in P(X; a, b)$, $t \in [0,1]$ 連続な族が存在する.



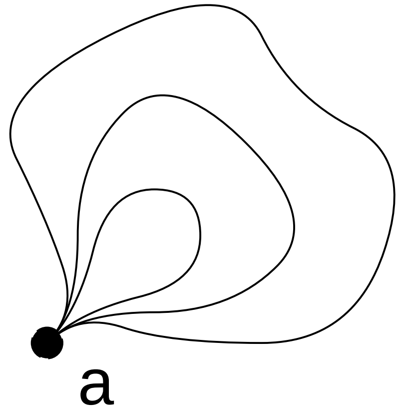
$\boldsymbol{\pi_1(X;a)} := \boldsymbol{P(X:a,a)/\simeq}$ **基本群**

$\boldsymbol{\pi_1(X;a)}$**: 自明** $\Longleftrightarrow \boldsymbol{\pi_1(X;a) \cong \{[a]\}}$.

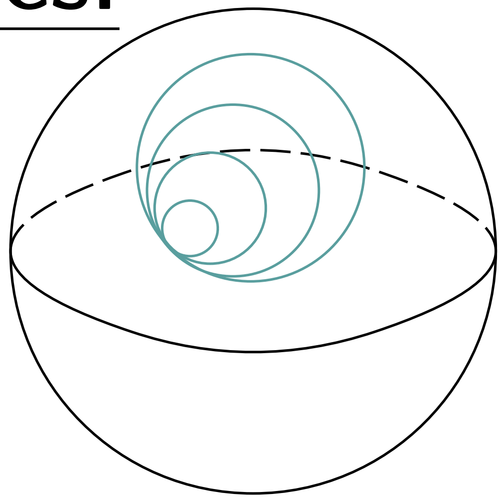


$\pi_1(X;a) := P(X : a, a)/\simeq$ 基本群

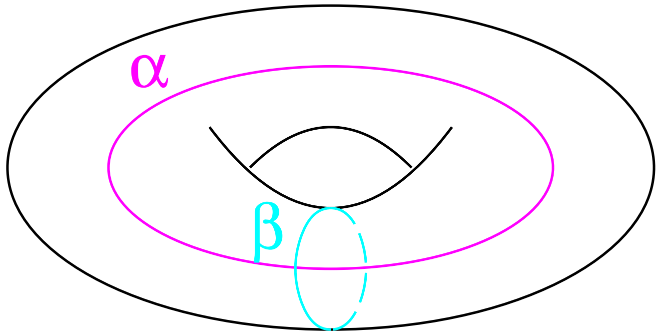
$\pi_1(X;a)$: 自明 $\Longleftrightarrow \pi_1(X;a) \cong \{[a]\}$.



Examples.



$$\pi_1(S^2) = \{e\}$$



$$\pi_1(T^2) \cong \langle \alpha, \beta; [\alpha, \beta] = e \rangle$$
$$= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

<u>**Remark.**</u>

- π_1 は位相不変量である．

  i.e. $\varphi\colon M \to N$ 同相

  $\Longrightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(N)$ 群として同型．

- $\pi_1(M) \cong \pi_1(N) \overset{?}{\Longrightarrow} M \approx N$ （一般には正しくない）

３次元多様体とHeegaard分解

◎３次元球面とは？

３次元球面S^3は，４次元空間$\mathbb{R}^4$内で原点からの距離が一定の点の集合として定義されます：

$$\boldsymbol{S^3} := \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\right\}.$$

３次元空間$\mathbb{R}^3$内では実現出来ません．

３次元多様体とHeegaard分解

◎３次元球面とは？

３次元球面S^3は，４次元空間$\mathbb{R}^4$内で原点からの距離が一定の点の集合として定義されます：

$$\boldsymbol{S^3} := \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 + \boldsymbol{w}^2 = 1\right\}.$$

３次元空間$\mathbb{R}^3$内では実現出来ません．

- $H := \{w = 0\}$**という原点を通る３次元平面でS^3を切断してみましょう．断面は２次元球面S^2です:**

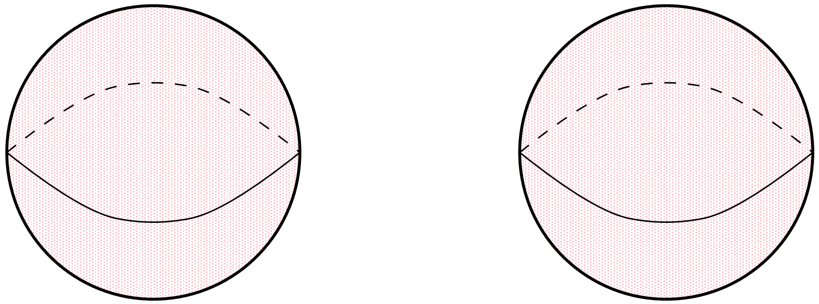
$$\boldsymbol{S^3} \cap \boldsymbol{H} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = 1\right\}.$$

この様に，S^3はS^2により２つの３次元ボールB^3に分けられます．

言い換えると，

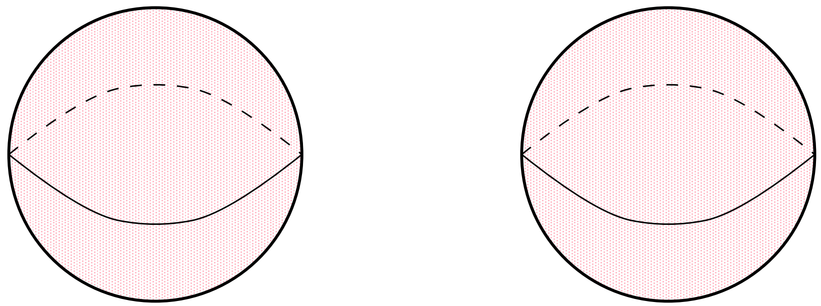
「S^3は３次元ボール$B^3 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$

２つを境界のS^2で張り合わせて出来る」と言えます．



言い換えると，

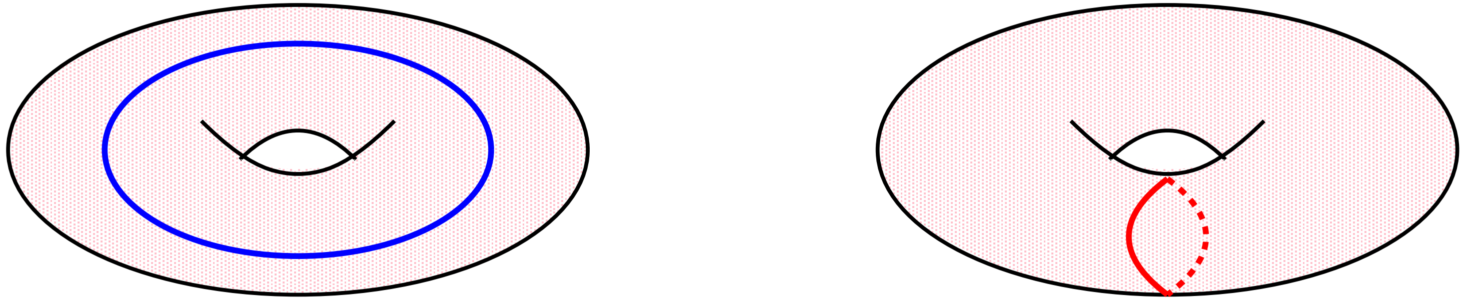
「S^3は３次元ボール$B^3 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$
２つを境界のS^2で張り合わせて出来る」と言えます．



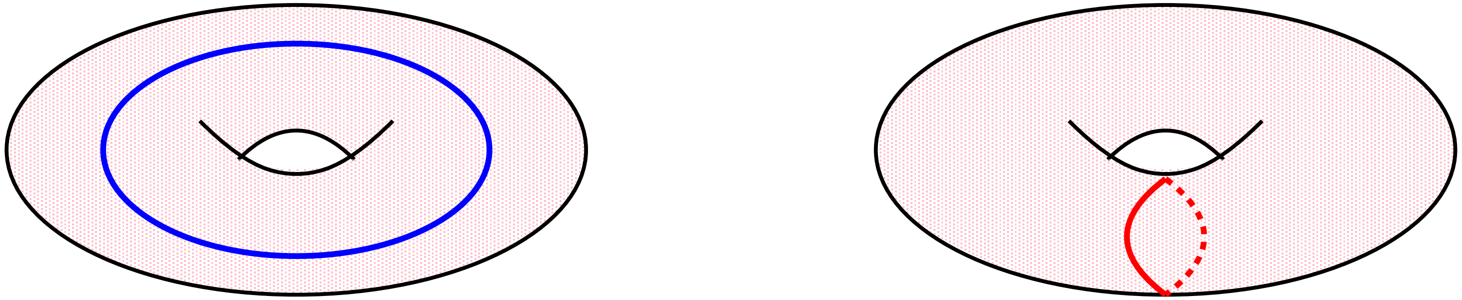
- S^3を$\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$にあるとみなします：

$$S^3 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\}.$$

S^3は次のトーラスT^2（ドーナツの表面，$S^1 \times S^1$）で，
２つのソリッドトーラス（中のつまったドーナツ，$S^1 \times D^2$）
に分けられます:$T^2 := \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_i| = 1/\sqrt{2},\ \ i = 1, 2\right\}$.



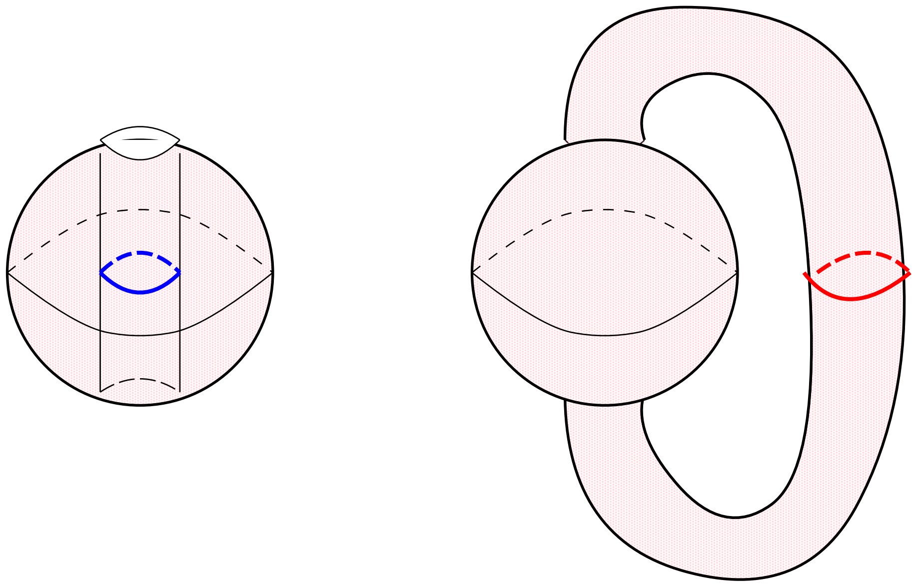
図の青と赤の曲線を重ねるように貼り合わせると，
S^3 が得られます．



図の青と赤の曲線を重ねるように貼り合わせると，

S^3が得られます．

ボールの貼り合わせから，次の様に考えても良いですね：



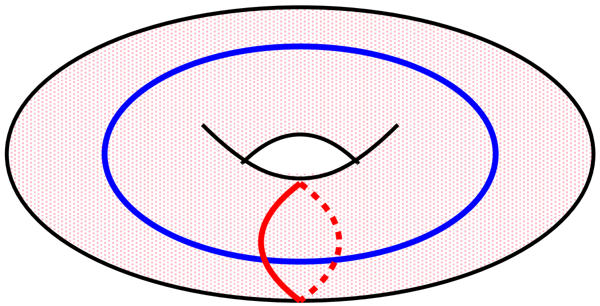
◎Heegaard分解

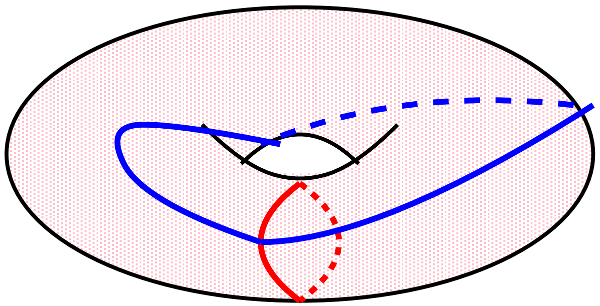
上の様に多様体を２つのハンドル体に分割することを

Heegaard分解といいます.

分割する曲面に赤の線も青の線も書き込んだものを

Heegaard図式と呼びます.





上のHeegaard図式は，どちらもS^3を表します.

定理 •全ての向き付け可能な閉３次元多様体は

Heegaard分解を持つ.

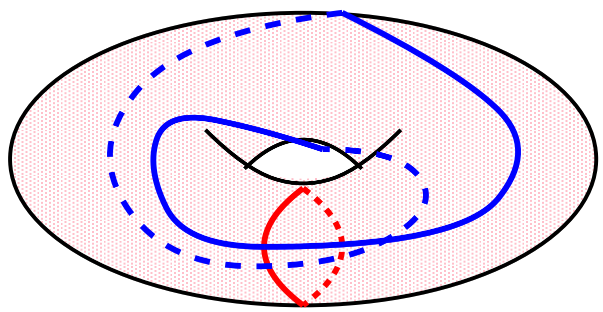
•一つのHeegaard図式から, 同相を除いて多様体が決まる.

<u>定理</u> •全ての向き付け可能な閉３次元多様体は

Heegaard分解を持つ.

•一つのHeegaard図式から, 同相を除いて多様体が決まる.

では，次のHeegaard図式はどうでしょうか：

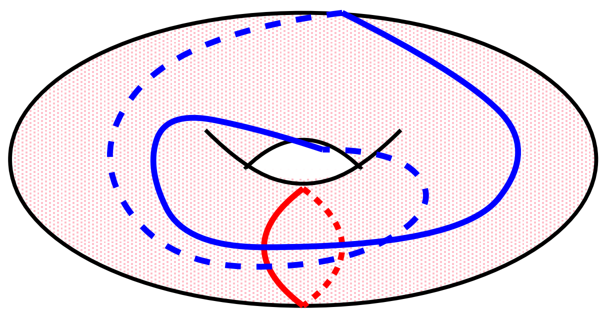


これはレンズ空間$L(2,1)$という向き付け可能な３次元閉多様体で，基本群は$\pi_1(L(2,1)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$で自明ではありません.

（すなわち，S^3と同相ではありません.）

定理 •全ての向き付け可能な閉３次元多様体は Heegaard分解を持つ.
•一つのHeegaard図式から，同相を除いて多様体が決まる.

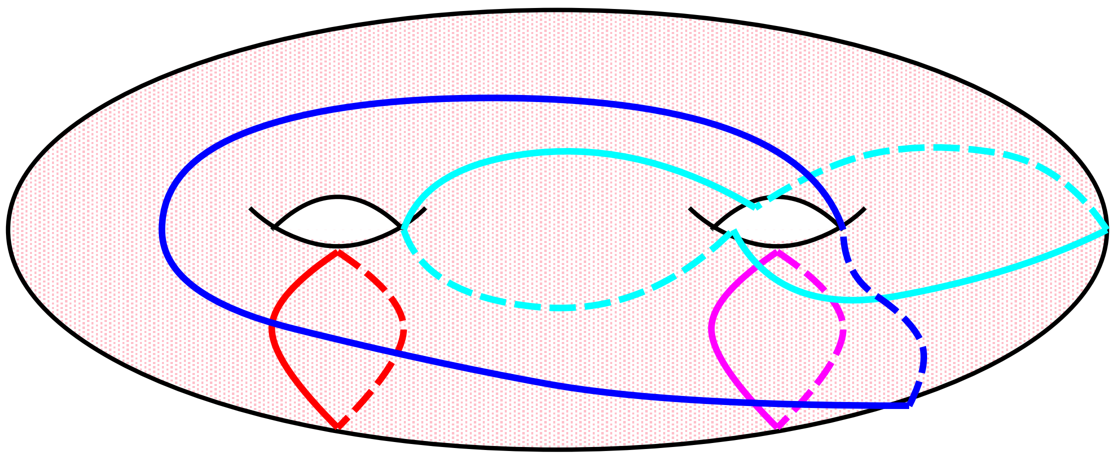
では，次のHeegaard図式はどうでしょうか：



これはレンズ空間 $L(2,1)$ という向き付け可能な３次元閉多様体で，基本群は $\pi_1(L(2,1)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で自明ではありません.
（すなわち，S^3 と同相ではありません.）

★ Heegaard図式から基本群を計算する方法があります.

問題3： 次のHeegaard図式はS^3を表すことを示せ：



トポロジーで研究されていることの例

（日本数学会トポロジー分科会のウェブサイトより）

http://wwwsoc.nii.ac.jp/msj6/dtopology/dtopology-index.html

写像や代数多様体の特異点の分類理論の研究，

多様体あるいは単体的複体への様々な群作用の研究，

曲面の写像類群のタイヒミュラー空間への作用の研究，

複素解析的写像の力学系理論の研究，

微分可能多様体上のベクトル場の力学系理論および葉層構造論の研究，

双曲３次元多様体および特異点を持つ双曲空間の分類理論の研究，

４次元多様体の微分構造およびシンプレクティク構造の研究，
共形場理論と３次元多様体の不変量の研究，
主束の様々な接続のモジュライ空間の位相の研究，
ポアソン多様体および接触多様体の研究，
同変一般（コ）ホモロジー理論とホモトピー論の研究，
結び目および絡み目の不変量と分類理論の研究，
野生的空間を含む一般位相空間の研究など